

Página 11

Resuelve

1. Expresa $3/7$ como lo haría un escriba en el antiguo Egipto.

Observamos que $\frac{3}{7}$ es mayor que $\frac{1}{3}$.

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}. \text{ Por tanto, } \frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}.$$

$$\frac{2}{21} \text{ es mayor que } \frac{1}{11}, \text{ y } \frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231} \rightarrow \frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Así, $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$. Esta es una de las muchas posibles descomposiciones.

2. Expresa en forma decimal el número que ves debajo, escrito por un matemático Italiano del siglo XV:

$$3 ; 8 , 29 , 44$$

¿Es ese algún número significativo en matemáticas? ¿Cuál?

$$3; 8, 29, 44 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3,14159259259$$

Esta es una aproximación del número π .

3. ¿Cómo escribirías en la tabla de arriba los números 780, $3/5$ y 1,6?

	60^2	60	1	$1/60$	$1/60^2$
$780 = 60 \cdot 13 \rightarrow$		< T T			
$\frac{2}{5} = \frac{24}{60} \rightarrow$				<< T T T T	
$1,6 = 1 + \frac{6}{10} = 1 + \frac{36}{60} \rightarrow$			T	<< T T T T T T	

4. ¿Qué números ves en esta tablilla?

$$1 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 15 = 3600 + 780 + 15 = 4395$$

$$5 + \frac{30}{60} = 5 + 0,5 = 5,5$$

$$1 + \frac{8}{60^2} = 1 + 0,00222... = 1,00222...$$

1 Números racionales

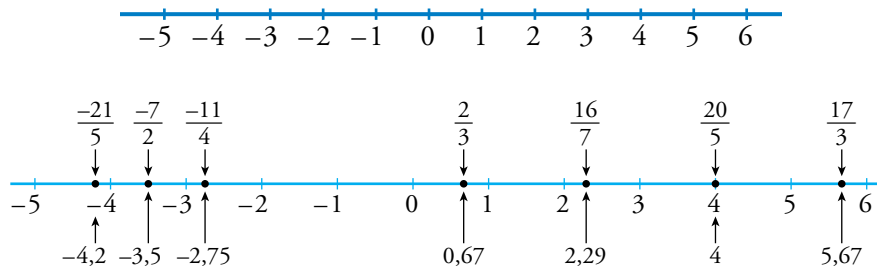
Página 12

1. ¿Verdadero o falso?

- a) El número 3 es natural, entero y racional.
 - b) El número -12 es entero pero no natural. Sí es racional.
 - c) El número $\frac{7}{5}$ es racional pero no entero.
 - d) $\frac{18}{-3}$ es racional pero no entero.
- a) Verdadero.
 - b) Verdadero.
 - c) Verdadero
 - d) Falso. $\frac{18}{-3} = -6$ es entero.

2. Dibuja en tu cuaderno una recta como la que aquí te presentamos y sitúa sobre ella, de forma aproximada, los siguientes números:

$$\frac{17}{3}, -\frac{11}{4}, \frac{20}{5}, \frac{2}{3}, \frac{16}{7}, -\frac{21}{5}, -\frac{7}{2}$$



Página 13

3. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{2}{5} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es positivo y el segundo, negativo.

b) $\frac{7}{3} > \frac{2}{5}$ porque el primero es mayor que 1 y el segundo, menor que 1.

c) $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es mayor que -2 y el segundo, menor que -2 .

a) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso. $-\frac{8}{3} < -2$ y $-\frac{7}{4} > -2$. Es decir, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{4}$.

4. Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$

b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$

d) 3 y $\frac{11}{2}$

a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$

b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

d) $3 < \frac{11}{2}$

5. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{13}{18}$$

mín.c.m. (12, 6, 9, 4, 18) = 36

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}; \quad \frac{4}{6} = \frac{24}{36}; \quad \frac{5}{9} = \frac{20}{36}; \quad \frac{3}{4} = \frac{27}{36}; \quad \frac{13}{18} = \frac{26}{36}$$

$$\frac{20}{36} < \frac{21}{36} < \frac{24}{36} < \frac{26}{36} < \frac{27}{36}$$

Por tanto: $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

2 Operaciones con fracciones

Página 14

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3}$

b) $1 - \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{7}{5} - 1$

e) $\frac{17}{5} - 3$

f) $\frac{17}{3} - 5$

a) $\frac{3}{3} = 1$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

f) $\frac{2}{3}$

Cálculo mental

a) $3 \cdot \frac{7}{9}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

a) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{6}{13}$

d) $\frac{1}{5}$

Cálculo mental

a) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$

b) $\frac{6}{5} : 6$

c) $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

a) 2

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{12}{5}$

d) 2

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

1. a) $\frac{7}{9} + \frac{11}{12}$

b) $6 - \frac{11}{4}$

c) $3 \cdot \frac{4}{5}$

d) $6 : \frac{4}{5}$

e) $\frac{4}{5} : 6$

f) $\frac{4}{5} : \frac{1}{6}$

a) $\frac{7}{9} + \frac{11}{12} = \frac{28}{36} + \frac{33}{36} = \frac{61}{36}$

b) $6 - \frac{11}{4} = \frac{24}{4} - \frac{11}{4} = \frac{13}{4}$

c) $3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

d) $6 : \frac{4}{5} = 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

e) $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

f) $\frac{4}{5} : \frac{1}{6} = \frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{24}{5}$

2. a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{6} - \frac{7}{8}\right) : \frac{25}{12}$

b) $\left(\frac{13}{15} - \frac{7}{25}\right) \cdot \left(\frac{9}{22} + \frac{-13}{33}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{6} - \frac{7}{8}\right) : \frac{25}{12} = \left(\frac{18}{24} + \frac{28}{24} - \frac{21}{24}\right) : \frac{25}{12} = \frac{25}{24} : \frac{25}{12} = \frac{25}{24} \cdot \frac{12}{25} = \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{13}{15} - \frac{7}{25}\right) \cdot \left(\frac{9}{22} + \frac{-13}{33}\right) = \left(\frac{65}{75} - \frac{21}{75}\right) \cdot \left(\frac{27}{66} + \frac{-26}{66}\right) = \frac{44}{75} \cdot \frac{1}{66} = \frac{2}{225}$

$$3. \text{ a) } \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)}{\frac{3}{4} + 1}$$

$$\text{b) } \frac{(-3) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)}{(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)}$$

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{4}\right)}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{4} : \frac{7}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } \frac{(-3) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)}{(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)} = \frac{(-3) \cdot \left(\frac{9}{15} - \frac{5}{15}\right)}{(-2) \cdot \left(\frac{20}{15} - \frac{18}{15}\right)} = \frac{(-3) \cdot \frac{4}{15}}{(-2) \cdot \frac{2}{15}} = \frac{-4}{5} : \frac{-4}{15} = \left(\frac{-4}{5}\right) : \left(\frac{-4}{15}\right) = \left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-15}{4}\right) = 3$$

$$4. \text{ a) } \frac{3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)}{6 + \frac{4}{25} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)}$$

$$\text{b) } \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{4}{3} + 1}$$

$$\text{a) } \frac{3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)}{6 + \frac{4}{25} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{9}{15} - \frac{2}{15}\right)}{6 + \frac{4}{25} \cdot \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{15}}{6 + \frac{4}{25} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{3 - \frac{7}{60}}{6 + \left(\frac{-1}{25}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{180}{60} - \frac{7}{60}}{\frac{150}{25} - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{173}{60}}{\frac{149}{25}} = \frac{173}{60} : \frac{149}{25} = \frac{173}{60} \cdot \frac{25}{149} = \frac{4325}{8940} = \frac{865}{1788}$$

$$\text{b) } \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{4}{3} + 1} = \frac{\left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{12} - \frac{10}{12}\right)}{\left(\frac{7}{12} - \frac{10}{12}\right) \cdot \frac{4}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{-1}{12}\right)}{\left(\frac{-3}{12}\right) \cdot \frac{4}{3} + 1} = \frac{\frac{-1}{108}}{\frac{-1}{3} + 1} = \frac{\frac{-1}{108}}{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{-1}{108} : \frac{2}{3} = \frac{-1}{108} \cdot \frac{3}{2} = \frac{-3}{216} = \frac{-1}{72}$$

Página 15

Cálculo mental

Halla la parte del total que corresponde a cada fracción:

- | | | |
|-------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $\frac{1}{2}$ de 520 000 € | b) $\frac{3}{5}$ de 1 000 000 de personas | c) $\frac{7}{10}$ de 500 edificios |
| a) 260 000 € | b) 600 000 personas | c) 350 edificios |

Cálculo mental

Di en cada caso la cantidad total:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) 350 es $\frac{1}{2}$ del total. | b) 400 es $\frac{2}{3}$ del total. | c) 350 es $\frac{7}{10}$ del total. |
| a) 700 | b) 600 | c) 500 |

Cálculo mental

Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ | b) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ | c) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ | d) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$ |
| a) $\frac{1}{4}$ | b) $\frac{1}{6}$ | c) $\frac{7}{12}$ | d) $\frac{1}{8}$ |

5. Un ciclista ha recorrido los $\frac{5}{9}$ de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

$$\frac{5}{9} \cdot 216 = 120$$

Lleva recorridos 120 km.

6. He sacado del banco 3 900 €, que son los $\frac{3}{11}$ de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

$$3\,900 \cdot \frac{11}{3} = 14\,300 \text{ € son la totalidad de mis ahorros.}$$

7. De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden $\frac{4}{15}$ a Braulio; $\frac{2}{5}$, a Enrique, y el resto, a Ruperto. Ruperto dedica $\frac{3}{10}$ de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperto a los frutales?

$$1 - \frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 4 - 6}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ de la balsa le corresponde a Ruperto.}$$

$$\text{Ruperto dedica } 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \text{ a los frutales.}$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5\,250 = 1\,225 \text{ l de agua dedica a regar frutales.}$$

3 Números decimales

Página 16

1. Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

3,52	$2,\widehat{8}$	$1,\widehat{54}$	$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$
2,7	3,5222...	$\pi - 2 = 1,1415926\dots$	
3,52		Decimal exacto.	
$2,\widehat{8}$		Decimal periódico puro.	
$1,\widehat{54}$		Decimal periódico puro.	
$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$		Decimal no exacto ni periódico.	
2,7		Decimal exacto.	
3,5222...		Decimal periódico mixto.	
$\pi - 2 = 1,1415926\dots$		Decimal no exacto ni periódico.	

2. Ordena de menor a mayor estos números:

$$2,\widehat{5} \quad 2,5 \quad 2,3\widehat{5} \quad 2,505005\dots$$

$$2,3\widehat{5} < 2,5 < 2,505005\dots < 2,\widehat{5}$$

3. Escribe tres números comprendidos entre 2,5 y $2,\widehat{5}$.

Respuesta abierta.

Por ejemplo: $2,5 < 2,51 < 2,52 < 2,5\widehat{2} < 2,\widehat{5}$

Página 17

4. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\widehat{3}$ $\frac{3}{3} = 3 \cdot 0,333... = 0,999... = 0,\widehat{9}$ Como $\frac{3}{3} = 1$, resulta que $0,\widehat{9} = 1$.

b) $5,\widehat{4} = 5,\widehat{44}$ c) $3,\widehat{72} = 3,7272727... = 3,7\widehat{27}$ d) $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = 1$

- a) Verdadero.
- b) Verdadero.
- c) Verdadero.
- d) Verdadero.

5. Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o decimales periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ b) $\frac{42}{150}$ c) $\frac{101}{1024}$ d) $\frac{1001}{500}$

a) $\frac{44}{150} = \frac{22}{75} \rightarrow 75 = 5^2 \cdot 3 \rightarrow$ Decimal periódico, pues en el denominador de la fracción simplificada hay algún factor (el 3) distinto de 2 y 5.

b) $\frac{42}{150} = \frac{7}{25} \rightarrow 25 = 5^2 \rightarrow$ Decimal exacto.

c) $\frac{101}{1024} \rightarrow 1024 = 2^{16} \rightarrow$ Decimal exacto.

d) $\frac{101}{500} \rightarrow 500 = 2^2 \cdot 5^3 \rightarrow$ Decimal exacto.

6. Calcula en tu cuaderno:

a) $7,\widehat{45} - 3,\widehat{454}$

b) $6 - 3,\widehat{9}$

c) $3,\widehat{5} + 2,\widehat{3} + 1,\widehat{1}$

a) 4

b) 2

c) 7

4 Paso de decimal a fracción

Página 18

1. Expresa en forma de fracción:

- | | | | |
|-----------|---------|-----------|-----------|
| a) 6,2 | b) 0,63 | c) 1,0004 | d) 3,5 |
| e) 0,1 | f) 2,7 | g) 0,23 | h) 41,041 |
| i) 40,028 | j) 5,9 | k) 7,009 | l) 0,99 |

$$a) \frac{62}{10} = \frac{31}{5}$$

$$b) 0,63 = \frac{63}{100}$$

$$c) 1,0004 = \frac{10\,004}{10\,000}$$

$$d) 10N - N = 35 - 3 \rightarrow 9N = 32 \rightarrow N = \frac{32}{9}$$

$$e) 10N - N = 1 \rightarrow 9N = 1 \rightarrow N = \frac{1}{9}$$

$$f) 10N - N = 25 \rightarrow 9N = 25 \rightarrow N = \frac{25}{9}$$

$$g) 100N - N = 23 - 0 \rightarrow 99N = 23 \rightarrow N = \frac{23}{99}$$

$$h) 1\,000N - N = 41\,041 - 41 \rightarrow 999N = 41\,000 \rightarrow N = \frac{41\,000}{999}$$

$$i) 1\,000N - N = 40\,028 - 40 \rightarrow 999N = 39\,988 \rightarrow N = \frac{39\,988}{999}$$

$$j) 10N - N = 59 - 5 \rightarrow 9N = 54 \rightarrow N = \frac{54}{9}$$

$$k) 1\,000N - N = 7\,002 \rightarrow N = \frac{7\,002}{999}$$

$$l) 100N - N = 99 \rightarrow 99N = 99 \rightarrow N = \frac{99}{99} = 1$$

2. Observamos que $0,208 + 0,791 = 0,999 = 1$.

Compruébalo expresando en forma de fracción cada sumando y efectuando la suma de fracciones.

$$0,208 + 0,791 = \frac{208}{999} + \frac{791}{999} = \frac{999}{999} = 1$$

3. Realiza los apartados b) y c) de la actividad 6 de la página anterior pasando, previamente, los decimales a fracciones y operando con ellas.

$$b) 6 - 3,9 = 6 - \frac{36}{9} = \frac{54 - 36}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$c) 3,5 + 2,3 + 1,2 = \frac{32}{9} + \frac{21}{9} + \frac{11}{9} = \frac{64}{9} = 7,1$$

Página 19

4. Completa el proceso para expresar como fracción el número dado en cada caso:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } 6,21\overline{7} \left\{ \begin{array}{l} N = 6,21777\dots \\ 100N = 621,77777\dots \\ 1000N = 6217,7777\dots \end{array} \right. \qquad \text{b) } 0,031\overline{62} \left\{ \begin{array}{l} N = 0,0316262\dots \\ 1000N = 31,626262\dots \\ 100000N = 3162,626262\dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

a) $1000N - 100N = 6217 - 621 \rightarrow 900N = 5526 \rightarrow N = \frac{5526}{900} = \frac{1399}{225}$

b) $100000N - 1000N = 3162 - 31 \rightarrow 99000N = 3131 \rightarrow N = \frac{3131}{99000}$

5. Expresa como fracción los decimales siguientes:

a) $6,2\overline{5}$ b) $0,00\overline{1}$ c) $5,0\overline{18}$

a) $100N - 10N = 625 - 62 \rightarrow 90N = 563 \rightarrow N = \frac{563}{90}$

b) $1000N - 100N = 1 - 0 \rightarrow 900N = 1 \rightarrow N = \frac{1}{900}$

c) $1000N - 10N = 5018 - 50 \rightarrow 990N = 4968 \rightarrow N = \frac{4968}{990} = \frac{276}{55}$

6. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:

a) 3,51 b) 5,202002000... c) $5,0\overline{3}$
 d) 0,3212121... e) $\pi = 3,141592\dots$ f) $7,4\overline{331}$

a) Sí es un número racional.

Fracción: $\frac{351}{100}$

b) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

c) Sí es un número racional.

Fracción: $\frac{498}{99} = \frac{166}{33}$

d) Sí es un número racional.

Fracción: $\frac{318}{990} = \frac{53}{165}$

e) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

f) Sí es un número racional.

Fracción: $\frac{74257}{9990}$

7. Comprueba, obteniendo las fracciones correspondientes, que $5,4\overline{8} = 5,4\overline{84}$.

$$\left. \begin{array}{l}
 5,4\overline{8} \rightarrow 100N - N = 543 \rightarrow N = \frac{543}{99} \\
 5,4\overline{84} \rightarrow 1000M - 10M = 5430 \rightarrow M = \frac{5430}{990} = \frac{543}{99}
 \end{array} \right\} 5,4\overline{8} = 5,4\overline{84}$$

Ejercicios y problemas

Página 21

Practica

Fracciones y decimales

1. Simplifica las fracciones siguientes:

$$\frac{24}{60}, \frac{114}{72}, \frac{51}{68}, \frac{26}{39}, \frac{125}{50}, \frac{225}{400}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}; \frac{114}{72} = \frac{19}{12}; \frac{51}{68} = \frac{3}{4}; \frac{26}{39} = \frac{2}{3}; \frac{125}{50} = \frac{5}{2}; \frac{225}{400} = \frac{9}{16}$$

2. Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{21}{49}, \frac{24}{36}, \frac{4}{5}, \frac{14}{21}, \frac{10}{15}, \frac{15}{35}, \frac{3}{7}$$

$$\frac{21}{49} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \quad \frac{24}{36} = \frac{14}{21} = \frac{10}{15} = \frac{4}{5}$$

3. En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

a) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{16}{30} \rightarrow \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{5}{6}$

b) $-\frac{12}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{14}{24}, -\frac{18}{24} \rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{7}{12} < -\frac{1}{2}$

c) $\frac{11}{24}, \frac{-42}{24}, \frac{9}{24}, \frac{-4}{24}, \frac{10}{24}, \frac{-40}{24} \rightarrow -\frac{7}{4} < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{6} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24}$

4. Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:

• $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$

b) $\frac{15}{8}$

c) $\frac{16}{7}$

d) $-\frac{3}{2}$

e) $-\frac{7}{3}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $-\frac{3}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

5. Expresa como número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}$$

$$\frac{9}{25} = 0,36; \quad \frac{13}{9} = 1,4\widehat{4}; \quad \frac{23}{6} = 3,8\widehat{3}; \quad \frac{17}{200} = 0,085$$

$$\frac{5}{7} = 0,7\overline{14285}; \quad \frac{233}{990} = 0,2\overline{335}; \quad \frac{13}{22} = 0,5\overline{90}$$

6. Determina, sin realizar la división, cuáles son decimales exactos y cuáles decimales periódicos.

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{7 \cdot 11}{3 \cdot 5^2} \quad \frac{19}{2^2 \cdot 5} \quad \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 23}{5 \cdot 7}$$

$$\text{Decimales exactos} \rightarrow \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{19}{2^2 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 23}{5 \cdot 7} \quad \text{Decimales periódicos} \rightarrow \frac{13}{9}, \frac{7 \cdot 11}{3 \cdot 5^2}$$

7. Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

$$\text{Decimales exactos} \rightarrow \frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250} \quad \text{Decimales periódicos} \rightarrow \frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$$

8. Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:

a) 1,6 y 1,8

b) 0,98 y 1

c) 0,28 y 0,29

d) 0,345 y 0,346

e) $2,\widehat{3}$ y 2,4

f) -4,5 y -4,4

a) 1,65; 1,7; 1,75

b) 0,982; 0,983; 0,984

c) 0,283; 0,285; 0,287

d) 0,3451; 0,3452; 0,3456

e) 0,234; 0,235; 0,236

f) -4,45; -4,46; -4,47

9. Ordena de menor a mayor en cada apartado:

a) 3,56; $3,5\widehat{6}$; $3,\widehat{5}$; $3,\widehat{56}$

b) -1,32; $-1,3\widehat{2}$; $-1,\widehat{32}$; $-1,\widehat{3}$

a) $3,\widehat{5} < 3,56 < 3,5\widehat{6} < 3,\widehat{56}$

b) $-1,\widehat{3} < -1,3\widehat{2} < -1,\widehat{32} < -1,32$

10. Expresa en forma de fracción.

a) 3,7

b) 0,002

c) -1,03

d) $2,\widehat{5}$

e) $0,\widehat{21}$

f) $14,\widehat{3}$

a) $\frac{37}{10}$

b) $\frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$

c) $-\frac{103}{100}$

d) $\frac{23}{9}$

e) $\frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

f) $\frac{129}{9} = \frac{43}{3}$

11. Expresa como fracción.

a) $0,3\widehat{2}$

b) $1,0\widehat{3}$

c) $0,0\widehat{12}$

d) $-3,\widehat{15}$

e) $5,34\widehat{5}$

f) $9,0\widehat{9}$

a) $\frac{29}{90}$

b) $\frac{93}{90} = \frac{31}{30}$

c) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

d) $\frac{-312}{99} = \frac{-104}{33}$

e) $\frac{4811}{900}$

f) $\frac{819}{90}$

Operaciones con fracciones

12.  Calcula y simplifica mentalmente las expresiones siguientes:

a) $2 + \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

d) $2 \cdot \frac{5}{4}$

e) $\frac{2}{3} : 2$

f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

h) $\frac{12}{7} : 3$

i) $\frac{7}{3} \cdot 21$

a) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{2}$


e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{5}$

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{4}{7}$

i) 49

13.  Calcula mentalmente:

a) $\frac{2}{3}$ de 60

b) $\frac{3}{4}$ de 100

c) $\frac{3}{500}$ de 500

d) La mitad de $\frac{2}{3}$.

e) La tercera parte de $\frac{12}{7}$.

f) La mitad de la quinta parte de -6.

a) 40


b) 75

c) 3

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{7}$

f) $-\frac{3}{5}$

14.  Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?


b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

a) 33

b) 28

c) 300

15.  Reduce a una fracción.

a) $\frac{3 + \frac{1}{2}}{7 - \frac{3}{2}}$

b) $\frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}$

c) $\frac{\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}$

a) $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{7}{11}$

b) $\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{12}{3}} = -\frac{5}{3}$

c) $\frac{\frac{21}{40}}{\frac{-3}{10}} = -\frac{7}{4}$

Página 22

16.  Efectúa y simplifica descomponiendo en factores, como en el ejemplo:

$$\bullet \frac{15}{21} \cdot \frac{7}{25} = \frac{15 \cdot 7}{21 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{21}$

b) $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{18}$

c) $\frac{12}{7} \cdot \frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16} \cdot \frac{20}{27}$

e) $\frac{13}{12} \cdot \frac{84}{65}$

f) $\frac{90}{35} \cdot \frac{14}{36}$

a) $\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 21} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{6 \cdot 5}{25 \cdot 18} = \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

c) $\frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 36} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{3}$

d) $\frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 27} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{13 \cdot 84}{12 \cdot 65} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{7}{5}$

f) $\frac{90 \cdot 14}{35 \cdot 36} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2} = 1$

17.  Reduce estas expresiones a una sola fracción:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{16} = \frac{16 - 1 - 2}{32} = \frac{13}{32}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12 - 5 + 40}{20}\right) - \left(\frac{15 - 8 + 20}{20}\right) = \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = \frac{20}{20} = 1$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3+1}{3} - \left(\frac{3+2}{4}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{3} - \frac{5}{48} = \frac{64-5}{48} = \frac{59}{48}$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \frac{9+5}{15} - \left[1 - \left(\frac{3-2}{4}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] =$
 $= \frac{14}{15} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right) = \frac{56 - 60 + 15 - 40 + 9}{60} = \frac{-20}{60} = \frac{-1}{3}$

18.  Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.

a) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$ b) $3 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2)$ c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$

a) $\frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{6} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{-16 + 18 - 8 - 18}{24} = \frac{-24}{24} = -1$

b) $3 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(-2) = 3 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{6}{8} = 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} - \frac{6}{8} = 3 - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{24 - 3 - 6}{8} = \frac{15}{8}$

c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{3}\right)\right] = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{12}\right) : \left[2 - \frac{1}{2} \left(\frac{3+5}{3}\right)\right] =$
 $= \left(\frac{30 - 10 + 2}{12}\right) : \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{22}{12} : \left(2 - \frac{8}{6}\right) = \frac{11}{6} : \left(\frac{12-8}{6}\right) = \frac{11}{6} : \frac{4}{6} = \frac{11}{4}$

19.  **Calcula y comprueba con la calculadora.**

a) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2$

c) $-\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13 \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)$

a) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 5 : \left(\frac{2+4}{4}\right) - 3 : \left(\frac{2-1}{4}\right) =$

$$= 5 : \frac{6}{4} - 3 : \frac{1}{4} = \frac{20}{6} - 12 = \frac{20-72}{6} = \frac{-52}{6} = \frac{-26}{3}$$

b) $\frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3-2}{4}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{5-2}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{3}{6}\right)^2 =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{36} = \frac{2}{48} - \frac{9}{216} = \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = 0$$

c) $-\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right] = -\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17-20}{20}\right) \cdot \left(\frac{1-9}{3}\right)\right] =$

$$= -\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{-3}{20}\right) \cdot \left(\frac{-8}{3}\right)\right] = -\frac{3}{8} \left[3 - \frac{3}{5} - \left(\frac{8}{20}\right)\right] =$$

$$= \frac{-3}{8} \left(\frac{60-12-8}{20}\right) = \frac{-3}{8} \cdot \frac{40}{20} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

d) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13 \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(-\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{6-1}{9} + 13 \left(\frac{2-3}{3}\right)^2\right] : \frac{-2}{3} =$

$$= \left[\frac{5}{9} + 13 \left(\frac{-1}{3}\right)^2\right] : \frac{-2}{3} = \left(\frac{5}{9} + \frac{13}{9}\right) : \frac{-2}{3} = \frac{18}{9} : \frac{-2}{3} = \frac{54}{-18} = -3$$

20.  **Calcula pasando previamente a fracción.**

a) $3,5 + 2,\widehat{3}$

b) $0,\widehat{12} - 0,2$

c) $1,\widehat{6} - 1,0\widehat{2}$

d) $3,\widehat{42} + 7,\widehat{6}$

e) $2,\widehat{3} + 4,\widehat{6}$

f) $6,\widehat{17} + 3,\widehat{82}$

a) $3,5 + 2,\widehat{3} = \frac{35}{10} + \frac{21}{9} = \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$

b) $0,\widehat{12} - 0,2 = \frac{12}{99} - \frac{2}{10} = \frac{4}{33} - \frac{1}{5} = -\frac{13}{165}$


c) $1,\widehat{6} - 1,0\widehat{2} = \frac{15}{9} - \frac{92}{90} = \frac{29}{45}$

d) $3,\widehat{42} + 7,\widehat{6} = \frac{339}{99} + \frac{69}{9} = \frac{122}{11}$

e) $2,\widehat{3} + 4,\widehat{6} = \frac{21}{9} + \frac{42}{9} = \frac{63}{9} = 7$


f) $6,\widehat{17} + 3,\widehat{82} = \frac{611}{99} + \frac{379}{99} = \frac{990}{99} = 10$

Aplica lo aprendido

- 21.**  Llevo leído $\frac{3}{8}$ de un libro de 288 páginas. ¿Cuántas páginas me quedan para acabar el libro?


$$\frac{3}{8} \text{ de } 288 = 108 \rightarrow \text{Llevo leídas } 108 \text{ páginas.}$$

$$288 - 108 = 180 \rightarrow \text{Me quedan } 180 \text{ páginas para terminar el libro.}$$

- 22.**  Juan mide 1,60 m, las $\frac{5}{6}$ partes de la altura de su padre. ¿Cuánto mide el padre de Juan?

$$\text{Juan mide } 1,60 \text{ m} \rightarrow \frac{5}{6} \text{ de } x = 1,60 \text{ m} \rightarrow x = \frac{1,60 \cdot 6}{5} = 1,92$$


El padre de Juan mide 1,92 m.

- 23.**  De los 28 alumnos de una clase, $\frac{4}{7}$ han aprobado todo, de los cuales $\frac{1}{8}$ obtuvieron sobresaliente de media. ¿Cuántos alumnos sacaron sobresaliente? ¿Cuántos suspendieron alguna asignatura?

$$\frac{4}{7} \text{ de } 28 \text{ han aprobado todo} \rightarrow \frac{4 \cdot 28}{7} = 16 \rightarrow 16 \text{ alumnos han aprobado todo.}$$


$$\frac{1}{8} \text{ de } 16 \text{ tiene sobresaliente de media} \rightarrow \frac{1 \cdot 16}{8} = 2 \rightarrow 2 \text{ alumnos tiene sobresaliente de media.}$$

$$28 - 16 = 12 \rightarrow 12 \text{ alumnos han suspendido alguna asignatura.}$$

- 24.**  Julia gastó $\frac{1}{3}$ de su dinero en libros y $\frac{2}{5}$ en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15} \text{ de total son } 36 \text{ €} \rightarrow \text{Total} = 36 \cdot \frac{15}{4} = 135 \text{ €}$$

- 25.**  Una mezcla de 600 g de cereales está compuesta por $\frac{7}{15}$ de trigo, $\frac{9}{25}$ de avena y el resto de arroz.

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla? b) ¿Qué cantidad hay de cada cereal?


$$\text{a) Parte de arroz: } 1 - \left(\frac{7}{15} + \frac{9}{25} \right) = \frac{13}{75}$$

$$\text{b) Cantidad de trigo} \rightarrow \frac{7}{15} \text{ de } 600 = \frac{7 \cdot 600}{15} = 280$$

$$\text{Cantidad de avena} \rightarrow \frac{9}{25} \text{ de } 600 = \frac{9 \cdot 600}{25} = 216$$


$$\text{Cantidad de arroz} \rightarrow \frac{13}{75} \text{ de } 600 = \frac{13 \cdot 600}{75} = 104$$

En la mezcla hay 280 g de trigo, 216 g de avena y 104 g de arroz.

- 26.**  De los 300 libros de una biblioteca, $\frac{1}{6}$ son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

$$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50 \text{ libros de poesía; } 300 - (180 + 50) = 70$$


$$\frac{70}{300} = \frac{7}{30} \text{ son libros de historia.}$$

- 27.**  De un bidón de aceite se saca primero la mitad, y después, la quinta parte de lo que queda. Si en el bidón aún hay 3 litros, ¿cuál es su capacidad?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} \text{ de } x = 3 \rightarrow x = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

La capacidad del bidón de aceite es de 7,5 litros.


- 28.**  En una frutería, los $\frac{5}{6}$ del importe de las ventas de un día corresponden a las frutas, y el resto, a las verduras. De lo recaudado por las frutas, los $\frac{3}{8}$ son de las naranjas, y ese día fueron 90 €. ¿Cuánto se recaudó en total? ¿Qué parte correspondió a las verduras?

$$\frac{3}{8} \text{ de } x = 90 \rightarrow x = \frac{90 \cdot 8}{3} = 240$$

$$\frac{5}{6} \text{ de las ventas son } 240 \text{ €} \rightarrow \frac{1}{6} \text{ de las ventas son } \frac{240}{5} = 48 \text{ €}$$

Se recaudó 48 € en verduras y $240 + 48 = 288$ € en total.


Resuelve problemas

- 29.**  De una cuenta bancaria, retiramos primero los $\frac{3}{8}$ y, después, los $\frac{7}{10}$ de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

$$\text{Se retiran primero } \frac{3}{8} \text{ y, después, } \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{16}.$$

$$\text{La parte que queda es } 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{16} \right) = \frac{3}{16}, \text{ que son } 1\,893 \text{ €}.$$


$$\text{Lo que había al principio es } 1\,893 \cdot \frac{16}{3} = 10\,096 \text{ €}.$$

- 30.**  De un depósito de aceite, se vacía la mitad; después, la mitad de lo que queda; luego, los $\frac{11}{15}$ del resto. Si quedan 36 l, ¿cuántos había al principio?

$$\text{Sacamos } \frac{1}{2}; \text{ después, } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Queda } \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Sacamos } \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{60} \rightarrow \text{Quedan } \frac{1}{4} - \frac{11}{60} = \frac{1}{15}, \text{ que son } 36 \text{ litros}.$$

Lo que había al principio son $36 \cdot 15 = 540$ litros.

- 31.**  Compro a plazos una bicicleta que vale 540 €. Pago el primer mes los $\frac{2}{9}$; el segundo, los $\frac{7}{15}$ de lo que me queda por pagar, y luego, 124 €.

a) ¿Cuánto he pagado cada vez? b) ¿Qué parte del precio me queda por pagar?

a) Primer mes: $540 \cdot \frac{2}{9} = 120 \text{ €} \rightarrow$ Quedan por pagar 420 €.


Segundo mes: $420 \cdot \frac{7}{15} = 196 \text{ €}.$

Tercer mes: 124 €.

b) Quedan por pagar: $540 - (120 + 196 + 124) = 100 \text{ €}.$

$$\frac{100}{540} = \frac{5}{27} \rightarrow \text{Parte que queda por pagar}.$$


Página 23

- 32.**  Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, su peso se reduce en $\frac{1}{5}$. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción $\frac{1}{4}$ de su peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?

$$\frac{1}{5} \text{ de } 10 = \frac{10 \cdot 1}{5} = 2 \rightarrow 10 - 2 = 8 \rightarrow \text{Nos quedan 8 kg de ciruelas.}$$

Se cuecen 8 kg de ciruelas con 8 kg de azúcar.


$$\frac{1}{4} \text{ de } 16 = \frac{1 \cdot 16}{4} = 4 \rightarrow 16 - 4 = 12 \rightarrow \text{Obtenemos 12 kg de mermelada.}$$

- 33.**  Un campo rectangular de 120 m de largo se pone a la venta en dos parcelas a razón de 50 € el metro cuadrado. La primera parcela, que supone los $\frac{7}{12}$ del campo, sale por 140 000 €. ¿Cuánto mide la anchura del campo?

Llamamos b a la anchura del campo.

$$\frac{7}{12} \cdot (120 \cdot b) \cdot 5 = 140\,000 \rightarrow 350b = 140\,000 \rightarrow b = 400$$

El terreno tiene una anchura de 400 m.


- 34.**  Dos agricultores, padre e hijo, tardan 2 horas en arar un campo. Si lo hace solo el padre tarda 6 horas. ¿Cuánto tardará el hijo en hacerlo solo?

Padre e hijo \rightarrow 2 horas \rightarrow En 1 hora aran $\frac{1}{2}$ del terreno.

Padre \rightarrow 6 horas \rightarrow En una hora ara $\frac{1}{6}$ de terreno.

En una hora, el hijo ara $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ del terreno.

Por tanto, el hijo tardará 3 horas en arar el terreno él solo.

- 35.**  Un grifo llena un depósito de agua en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, entonces el tiempo de llenado es 36 horas. ¿Cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito, estando el grifo cerrado?


Grifo \rightarrow 9 h de llenado \rightarrow en 1 hora llena $\frac{1}{9}$

Grifo + desagüe \rightarrow 36 h de llenado \rightarrow en 1 hora llenan $\frac{1}{36}$

El desagüe vacía el depósito a razón de $\frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$ cada hora.

El desagüe vacía el depósito, estando el grifo cerrado, en 12 horas.

Problemas “+”

36.  Un grupo de amigos ha ido a comer a una pizzería y han elegido tres tipos de pizza, A, B y C. Cada uno ha tomado $\frac{1}{2}$ de A, $\frac{1}{3}$ de B y $\frac{1}{4}$ de C; han pedido en total 17 pizzas y, como es lógico, no ha sobrado ninguna entera.

- ¿Ha tomado cada uno más de una pizza, o menos? ¿Cuántos amigos son?
- ¿Cuántas pizzas de cada tipo han encargado? ¿Ha sobrado algo?
- Contesta a las mismas preguntas si hubiese sido 20 el número de pizzas pedido.

a) Cada uno toma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; es decir, han tomado más de una pizza cada uno.

Como cada uno toma más de una pizza y han comprado 17 pizzas, eso quiere decir que son menos de 17. Veamos cuántos.

$$\frac{13}{12}x = 17 \rightarrow x = 15,69$$

Por tanto, son 15 amigos.

b) Sabiendo que cada uno toma $\frac{1}{2}$ de A, $\frac{1}{3}$ de B y $\frac{1}{4}$ de C, y que son 15 amigos, han encargado:

- 8 pizzas de A, pues $\frac{15}{2} = 7,5$, y ha sobrado $\frac{1}{2}$ de pizza A.
- 5 pizzas de B, pues $\frac{15}{3} = 5$, y no ha sobrado nada de pizza B.
- 4 pizzas de C, pues $\frac{15}{4} = 3,75$, y ha sobrado $\frac{1}{4}$ de pizza C.

c) Si han comprado 20 pizzas:

- Siguen comiendo $\frac{13}{12} > 1$ cada uno.

$$\frac{13}{12}x = 20 \rightarrow x = 18,46$$


Ahora son 18 amigos.

- Ahora han encargado:

$$\frac{18}{2} = 9 \text{ pizzas A}$$

$$\frac{18}{3} = 6 \text{ pizzas B}$$

$$\frac{18}{4} = 4,5 \rightarrow \text{Han encargado 5 pizzas C y ha sobrado } \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ de C.}$$

37.  En una receta para hacer mermelada de higos se lee: “añadir 400 g de azúcar y 100 g de agua por cada kilo de higos”. Tres amigas, A, B y C, con un puesto en el mercado, elaboraron estas cantidades:

A → 2 botes de $\frac{5}{8}$ kg y 4 de $\frac{9}{25}$ kg

B → 3 botes de $\frac{1}{5}$ kg y 3 de $\frac{5}{8}$ kg

C → 5 botes de $\frac{9}{25}$ kg y 2 de $\frac{1}{5}$ kg

a) ¿Cuál de las tres preparó más cantidad?

b) Si una persona pide $\frac{3}{4}$ kg, ¿cuál es la forma de entregarle la cantidad más próxima?

c) Si el agua se evapora durante la cocción, ¿cuál es la proporción de azúcar que tiene la mermelada?

a) Han preparado:

$$A \rightarrow 2 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{9}{25} = \frac{269}{100} = 2,69 \text{ kg}$$

$$B \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{99}{40} = 2,475 \text{ kg}$$

$$C \rightarrow 5 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = 2,2 \text{ kg}$$

La amiga A preparó más cantidad.

b) $\frac{3}{4}$ kg = 750 g

Utilizando dos botes de $\frac{1}{5}$ y uno de $\frac{9}{25}$, conseguimos:


$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25} = 0,760 \text{ kg} = 760 \text{ g}$$

c) La mezcla total pesa $400 + 100 + 1\,000 = 1\,500$ g.

Como perdemos 100 g por evaporación del agua, nos queda que la proporción de azúcar es:

$$\frac{400}{1\,400} = \frac{2}{7} = 0,286 \rightarrow 28,6\%$$

Reflexiona sobre la teoría

38.  ¿Cuáles de los siguientes números no son racionales? Pon en forma de fracción los que sea posible:

a) 0,018

b) $\sqrt{2}$

c) 1,212112111...

d) 2π

e) 7,03232...

f) $0,\overline{23}$

Irracionales: $\sqrt{2}$; 1,212112111...; 2π

a) $0,018 = \frac{18}{1000}$

e) $7,03232\dots = 7,0\overline{32} = \frac{6\,962}{990}$

f) $0,\overline{23} = \frac{23}{99}$

39. a) Expresa en forma decimal el valor de:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

b) Escribe el resultado en forma de fracción.

a) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots = 0,777\dots = 0,\widehat{7}$

b) $0,\widehat{7} = \frac{7}{9}$

40. Busca cuatro números fraccionarios comprendidos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. ¿Cuántos hay?

Buscamos fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ con un denominador común, por ejemplo 36:

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{36} \quad \frac{1}{2} = \frac{18}{36}$$

Entre $\frac{12}{36}$ y $\frac{18}{36}$ están comprendidas $\frac{13}{36}, \frac{14}{36}, \frac{15}{36}, \frac{16}{36}$.

Si en lugar de 36 elegimos un denominador común muy grande, podemos escribir tantas como queramos. Hay infinitos.

41. Divide por 3 varios números menores que 10 y observa los resultados. ¿Qué puede ocurrir cuando dividimos por 3?

¿Puedes predecir las cifras decimales de los cocientes $30 : 3$; $31 : 3$ y $32 : 3$?

La parte decimal del cociente $a : 3$ es 6666... ¿Cuál será la parte decimal de $(a + 1) : 3$ y de $(a + 2) : 3$?

Cuando dividimos entre 3 podemos obtener un número exacto, un decimal periódico puro de periodo 3 o bien un decimal periódico puro de periodo 6.

$30 : 3 \rightarrow$ No tiene cifras decimales.

$31 : 3 \rightarrow$ Periódico puro de periodo 3.

$32 : 3 \rightarrow$ Periódico puro de periodo 6.

$(a + 1) : 3 \rightarrow$ No tiene parte decimal.

$(a + 2) : 3 \rightarrow$ Periódico puro de periodo 3.

42. ¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.

a) Hay números decimales que no son racionales.

b) El cociente de dos números decimales exactos es siempre un decimal exacto.

c) Al sumar dos números decimales periódicos puros se obtiene siempre un decimal periódico puro.

d) Todos los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

a) Verdadero. π es irracional. b) Falso. $2,33 : 1,7 = 1,3705882\dots$


c) Verdadero. El denominador de una fracción que representa a un decimal periódico puro es de la forma 9 o $99 = 9 \cdot 11$ o $999 = 9 \cdot 111$ o ... Al sumar dos fracciones con estos denominadores, se obtiene una fracción cuyo denominador es 9 o 99 o $999\dots$ Es decir, un decimal periódico puro. $3,\widehat{7} + 5,\widehat{8} = 9,\widehat{6}$

d) Verdadero. Si a es un entero, $a = \frac{a}{1}$.

43.  ¿Cuál de estas fracciones es equivalente a a/b ?

$$\frac{a+1}{b+1} \quad \frac{2a}{3b} \quad \frac{ab}{b^2} \quad \frac{a^2}{b^2}$$

$\frac{ab}{b^2}$ y $\frac{a^2}{b^2}$ son equivalentes a $\frac{a}{b}$.

44.  Sabiendo que $a > b > c > 0$, compara estos pares de fracciones y di cuál es la menor en cada caso:

a) $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$

b) $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$

c) $\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{c}$

a) $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$

b) $\frac{b}{c} < \frac{a}{c}$

c) $\frac{b}{a} < \frac{b}{c}$

45.  Divide por 11 los números del 1 al 10 y anota los resultados.

a) ¿Cuántos decimales distintos pueden salir?

b) ¿Tiene eso que ver con el hecho de que estemos dividiendo entre 11?

c) ¿Puedes predecir el resultado de $23 : 11$ y de $40 : 11$?

a) $\frac{1}{11} = 0,0\overline{9}$; $\frac{2}{11} = 0,1\overline{8}$; $\frac{3}{11} = 0,2\overline{7}$...; $\frac{4}{11} = 0,3\overline{6}$; $\frac{5}{11} = 0,4\overline{5}$;

$\frac{6}{11} = 0,5\overline{4}$; $\frac{7}{11} = 0,6\overline{3}$; $\frac{8}{11} = 0,7\overline{2}$; $\frac{9}{11} = 0,8\overline{1}$; $\frac{10}{11} = 0,9\overline{0}$

Se obtienen 10 decimales distintos.

b) Sí tiene que ver.

c) $\frac{23}{11} = 2,0\overline{9}$; $\frac{40}{11} = 3,6\overline{3}$

Utiliza tu ingenio

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

“CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS”

¿Podrías aclarar la cuestión?

$$5 \cdot 4,20 + 1 = 22$$

Entrena resolviendo problemas

- **Un joyero consigue una rebaja de 140 € en la compra de 16 broches iguales, cuyo precio, según el catálogo, es de 87,5 € cada unidad.**

¿A cuánto debe vender cada uno si desea obtener una ganancia total de 500 €?

Los 16 broches valen $\rightarrow 16 \cdot 87,5 = 1\,400 \text{ €}$

Los 16 broches le cuestan $\rightarrow 1\,400 - 140 = 1\,260 \text{ €}$

Para ganar 500 € debe recaudar $\rightarrow 1\,260 + 500 = 1\,760 \text{ €}$

El precio de venta final debe ser de $\rightarrow 1\,760 : 16 = 110 \text{ €}$

- **Marta compra tres tortas, y Beatriz, dos. Cuando van a merendar, se les une su amiga Verónica, que no trae tortas. A la hora de compartir gastos, a Verónica le toca poner 5 €.**



¿Cómo se repartirán esos 5 € Marta y Beatriz?

Como tienen 5 tortas, a cada una le toca $\frac{5}{3}$ de torta.

Marta aporta para Verónica $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} =$ de torta.

Beatriz aporta para Verónica $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} =$ de torta.

Los 5 € que paga Verónica los deben repartir proporcionalmente a $\frac{4}{3}$ y a $\frac{1}{3}$.

Por tanto, 4 € para Marta y 1 € para Beatriz.

- **Un grupo de amigos entra en una cafetería. Todos piden café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo. Un café cuesta 0,85 €, y un bollo, 1,10 €.**

Para pagar, entregan al camarero 11 €.

¿Han dejado propina? Si es así, ¿de cuánto ha sido?

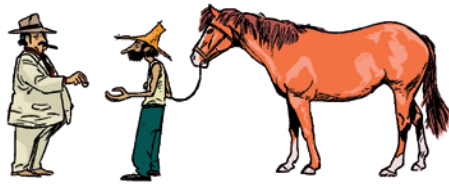
Como se dice que la quinta parte pide un bollo, el número de amigos es un múltiplo de 5.

Si fuesen 5, las consumiciones habrían costado $5 \cdot 0,85 + 1,10 = 5,35 \text{ €}$ (cantidad muy alejada de 11 €).

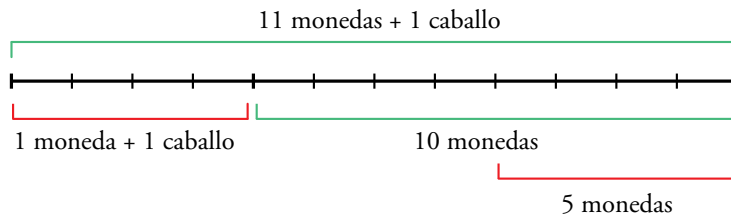
Si fuesen 10 amigos, el precio de las consumiciones habría sido $5,35 \cdot 2 = 10,70 \text{ €}$, muy próximo a 11 €.

Por lo tanto, han dejado una propina de $11 - 10,70 = 0,30 \text{ €} = 30 \text{ céntimos}$.

- Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de once monedas de oro y un caballo. A los cuatro meses, el sirviente se despide, recibiendo el caballo y una moneda.



¿Cuál era el valor del caballo?



“5 monedas” equivalen a “1 caballo + 1 moneda”.
Por tanto, un caballo tiene el valor de 4 monedas.

Autoevaluación

1. Efectúa y simplifica el resultado.

$$\frac{1}{2} \left[3 - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{5}{9} \right) - \left(4 - \frac{2}{3} \right) : 2 \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[3 - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{5}{9} \right) - \left(4 - \frac{2}{3} \right) : 2 \right] = \frac{1}{2} \left[3 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} - \frac{10}{3} : 2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 - \frac{8}{45} - \frac{10}{6} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{270 - 16 - 150}{90} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{104}{90} = \frac{104}{180} = \frac{26}{45}$$

2. Calcula el resultado de esta suma pasando, previamente, cada decimal a fracción:

$$-1,8\widehat{9} + 0,0\widehat{28} + 0,\widehat{72}$$

$$-1,8\widehat{9} \left\{ \begin{array}{l} N = -1,8999... \\ 10N = -18,999... \\ 100N = -189,999... \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 100N - 10N = -171 \\ \rightarrow N = -\frac{171}{90} \end{array} \right.$$

$$0,0\widehat{28} \left\{ \begin{array}{l} N = 0,028... \\ 10N = 0,28... \\ 1000N = 28,28... \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 1000N - 10N = 28 \\ \rightarrow N = \frac{28}{990} \end{array} \right.$$

$$0,\widehat{72} \left\{ \begin{array}{l} N = 0,72... \\ 100N = 72,72... \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 100N - N = 72 \\ \rightarrow N = \frac{72}{99} \end{array} \right.$$

$$-1,8\widehat{9} + 0,0\widehat{28} + 0,\widehat{72} = -\frac{171}{90} + \frac{28}{990} + \frac{72}{99} = \frac{-1881 + 28 + 720}{990} = -\frac{1133}{990} = -1,1\widehat{4}$$

3. Escribe, en cada caso, tres números comprendidos entre los dos dados:

a) $\frac{3}{20}$ y $\frac{4}{25}$ b) $2,\widehat{7}$ y $2,\widehat{8}$

a) $\frac{3}{20} = 0,15$; $\frac{4}{25} = 0,16$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$0,15 < 0,151 < 0,1519 < 0,1531 < 0,16$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$2,\widehat{7} < 2,78 < 2,783 < 2,787 < 2,\widehat{8}$$

4. Clasifica en decimales exactos o periódicos sin hacer la división.

$$\frac{89}{50} \quad \frac{113}{12} \quad \frac{23}{32} \quad \frac{18}{7}$$

$$\frac{89}{50} \rightarrow \text{Decimal exacto}$$

$$\frac{113}{12} \rightarrow \text{Decimal periódico}$$

$$\frac{23}{32} \rightarrow \text{Decimal exacto}$$

$$\frac{18}{7} \rightarrow \text{Decimal periódico}$$

5. Dos cajas con manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo.

La primera, que supone los $\frac{5}{12}$ del total, se vende por 50 €.

¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?

Si $\frac{5}{12}$ del total se vende por 50 €, el total se vende por $\frac{50 \cdot 12}{5} = 120$ €.

El total de kilos es $120 : 2,5 = 48$ kg

La primera caja tiene $\frac{48 \cdot 5}{12} = 20$ kg

La segunda caja tiene $48 - 20 = 28$ kg

6. Entre los usuarios de un polideportivo, la quinta parte tiene más de 60 años, y dos de cada tres están entre los 25 y los 60 años.

a) ¿Qué fracción de los usuarios tiene 25 años o menos?

b) Si el número de usuarios es 525, ¿cuántos hay de cada grupo de edad?

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$

Los $\frac{2}{15}$ de los usuarios tienen 25 años o menos.

b) Más de 60 años $\rightarrow \frac{1}{5} \cdot 525 = 105$

Entre 25 y 60 años $\rightarrow \frac{2}{3} \cdot 525 = 350$

Menos de 25 años $\rightarrow \frac{2}{15} \cdot 525 = 70$

- 7. Compro una bicicleta que pagaré en tres plazos. En el primero, pago los $\frac{3}{10}$ del total; en el segundo, $\frac{4}{5}$ de lo que me queda por pagar, y para el tercero, solo tengo que pagar 21 €. ¿Cuál es el precio de la bicicleta?**

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{15+28}{50} = \frac{43}{50}$$

$\frac{7}{50}$ de lo que tengo que pagar son 21 €.

El total es $\frac{21 \cdot 50}{7} = 150$ €.

- 8. ¿Verdadero o falso?**

- a) **Todas las fracciones son números racionales.**
- b) **Todos los números racionales son fraccionarios.**
- c) **Los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.**
- d) **Una fracción siempre equivale a un número decimal periódico.**
- e) **Un número decimal periódico es un número racional.**

- a) Verdadero
- b) Falso, los números enteros son también números racionales.
- c) Verdadero
- d) Falso, la fracción $\frac{1}{5}$ es un número decimal exacto.
- e) Verdadero