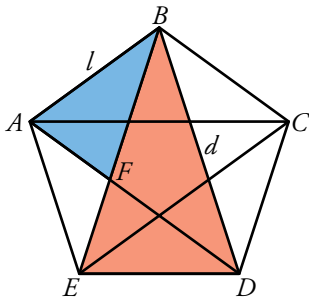


Resuelve

Página 29



1. Demuestra que los triángulos ABF y EBD son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).
2. Si llamamos l al lado del pentágono y d a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo ABF , y $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo EBD . Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo \hat{A} en el triángulo ABF , y \hat{D} en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD ; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

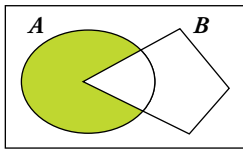
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 31

1 ¿Verdadero o falso?



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B .

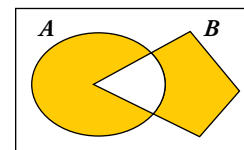
b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B , ya que B' es el complementario de B .

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .



d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B , pero no puede estar en los dos a la vez ($A \cap B$).

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\mathring{3}) \text{ y } x \in (\mathring{2})] \Leftrightarrow x \in (\mathring{6})$

(\mathring{n}) es el conjunto de los múltiplos de n .

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\mathring{3}) \cap (\mathring{2}) = (\mathring{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B , luego están en A y en B' .

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B .

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A , es porque todos los elementos de A están en B , luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A .

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ y $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo $(0, 1)$ está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ pero $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que -2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que -5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$.

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que -5 y menores que 7, están en el intervalo $(-5, 7)$ y además son enteros.

r) $(x \text{ es un número real pero no es racional}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

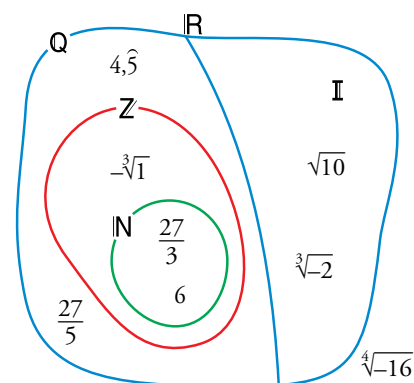
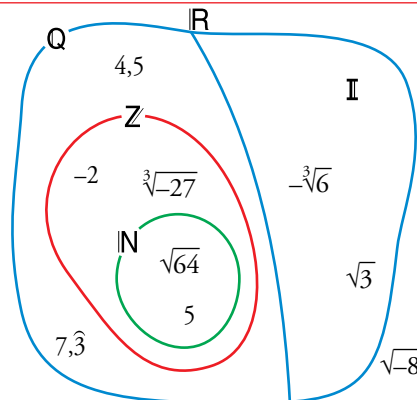
Página 32

Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:

Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-^3\sqrt{1}$; $4,5$; 6 ; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; $\frac{27}{5}$; $\frac{27}{3}$



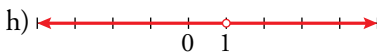
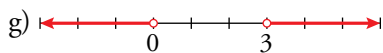
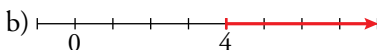
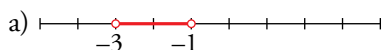
$$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N} \quad 6, \frac{27}{3}, -^3\sqrt{1} \in \mathbb{Z} \quad 6; \frac{27}{3}; -^3\sqrt{1}; 4,5; \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$$

$$6; \frac{27}{3}; -^3\sqrt{1}; 4,5; \frac{27}{5}; \sqrt{10}; \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R} \quad -^3\sqrt{6}, \sqrt{3} \in \mathbb{I} \quad \sqrt[4]{-16} \text{ no es real}$$

Página 33

1 Representa los siguientes conjuntos:

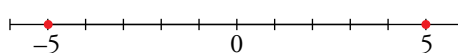
- | | | | |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(-3, -1)$ | b) $[4, +\infty)$ | c) $(3, 9]$ | d) $(-\infty, 0)$ |
| e) $\{x / -2 \leq x < 5\}$ | f) $[-2, 5) \cup (5, 7]$ | g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ | h) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ |



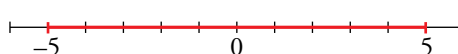
2 Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

- | | | |
|---------------------|------------------|------------------|
| a) $ x = 5$ | b) $ x \leq 5$ | c) $ x - 4 = 2$ |
| d) $ x - 4 \leq 2$ | e) $ x - 4 > 2$ | f) $ x + 4 > 5$ |

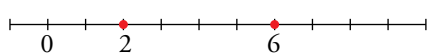
a) 5 y -5



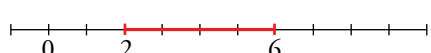
b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$



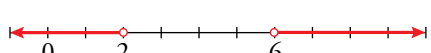
c) 6 y 2



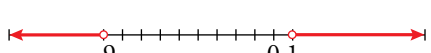
d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$



e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$



f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicales. Propiedades

Página 34

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132650}$

4 Simplifica.

a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 35

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$

f) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2} \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$$

6 Simplifica.

a) $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ c) $\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $15 \sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = 15 \sqrt{\frac{1}{x^2}} = 15 \sqrt{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{ab}$

c) $\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{bc}}$

7 Reduce.

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $10 \sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = 10 \sqrt[10]{2^3} = 10 \sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 Suma y simplifica.

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ f) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:
 $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 36

9 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$ f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$ g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$ j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \frac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \frac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(2-1) + 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 39

1 Halla.

- | | | | |
|------------------|--|---------------|--------------------|
| a) $\log_2 16$ | b) $\log_2 0,25$ | c) $\log_9 1$ | d) $\log_{10} 0,1$ |
| e) $\log_4 64$ | f) $\log_7 49$ | g) $\ln e^4$ | h) $\ln e^{-1/4}$ |
| i) $\log_5 0,04$ | j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$ | | |

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

c) $\log_9 1 = 0$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

g) $\ln e^4 = 4$

i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$

b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$

d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de...

- | | | | |
|------------------|-------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $\log_2 60$. | b) $\log_5 700$. | c) $\log_{10} 43\,000$. | d) $\log_{10} 0,084$. |
| e) $\log_9 60$. | f) $\ln e$. | g) $\log_{20} 450\,000$. | h) $\log_{5,4} 900$. |

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$

d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$

$-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4,0337$

$5,4^4 = 850,31$; $5,4^5 = 4\,591,7$

Como $5,4^4 = 850,31 < 900 < 4\,591,7 = 5,4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $\log_2 1500$

b) $\log_5 200$

c) $\log_{100} 200$

d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10,55; 2^{10,55} \approx 1500$

b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3,29; 5^{3,29} \approx 200$

c) $\frac{\log 200}{\log 100} = 1,15; 100^{1,15} \approx 200$

d) $\frac{\log 40}{\log 100} = 0,80; 100^{0,80} \approx 40$

4 Calcula sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$.

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5 Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 41

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

$$\text{I. E.R.} < \frac{10000}{390000} = 2,5641 \cdot 10^{-2} = 0,025641 \rightarrow \text{E.R.} < 2,6\%$$

$$\text{II. E.R.} < \frac{1}{12} = 8,3333 \cdot 10^{-2} = 0,08333 \rightarrow \text{E.R.} < 8,3\%$$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m².

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

a) E.A. < 0,05 m²; E.R. < $\frac{0,05}{96,4} = 5,1867 \cdot 10^{-4} = 0,00051867 \rightarrow \text{E.R.} < 0,05\%$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

$$\text{E.R.} < \frac{0,5}{37} < 0,014 = 1,4\%$$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los “miles de euros”), entonces:

$$\text{E.A.} < 0,5 \text{ miles de } \text{€} = 500 \text{ €} \quad \text{E.R.} < \frac{0,5}{19} < 0,027 = 2,7\%$$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

$$\text{E.A.} < 0,5 \text{ €} \quad \text{E.R.} < \frac{0,5}{19000} < 0,000027 = 0,0027\%$$

Página 42

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

$$\begin{aligned} \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ &= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ &= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

4 Opera con la calculadora:

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

$$\text{a) } (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$$

$$\text{b) } 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$$

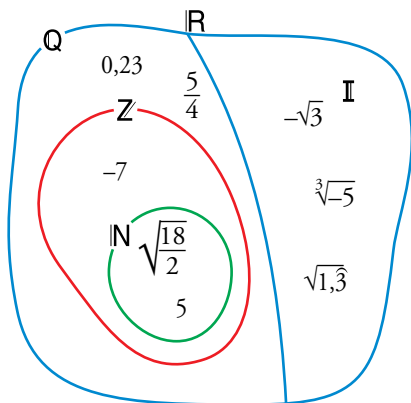
Ejercicios y problemas resueltos

Página 43

1. Conjuntos numéricos

Hazlo tú. Clasifica los siguientes números:

$$5; -7; 0,23; \frac{5}{4}; \sqrt{\frac{18}{2}}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; \sqrt{1,3}$$



2. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:

a) $|x + 2| \geq 5$

b) $|4 - x| < 3$

a) $|x + 2| \geq 5 \rightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 5 \\ x + 2 \leq -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -7 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4 - x| < 3 \rightarrow -3 < 4 - x < 3 \rightarrow -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$$1 < x < 7 \rightarrow x \in (1, 7)$$

3. Simplificación de radicales

Hazlo tú. Simplifica.

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$

b) $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7 \cdot 3}} = x^3$

b) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

Página 44

4. Operaciones con radicales

Hazlo tú. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \sqrt{2^5} + \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 5^2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} = \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{8^3 a^3 b^3} \cdot \sqrt[6]{(a^2)^2 b^2} = 2\sqrt{2} \sqrt[6]{a^3 b^3} \sqrt[6]{a^4 b^2} = 2\sqrt{2} \sqrt[6]{a^7 b^5} = 2\sqrt{2} a \sqrt[6]{ab^5}$$

5. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$

b) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

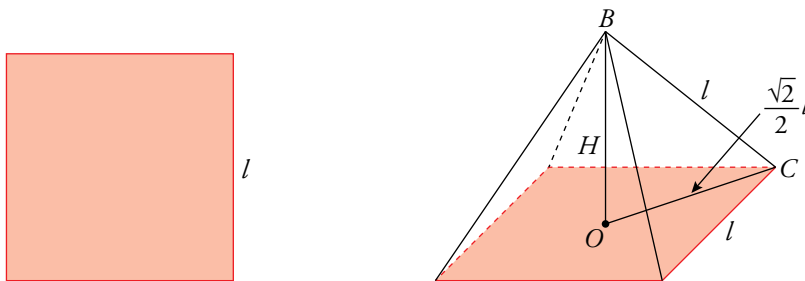
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5}-3$$

6. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular es $\frac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.



La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} l^2 \cdot H = \frac{256}{3} \sqrt{2}$$

La distancia \overline{OC} es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado \overline{OC} .

$$\text{Por ser la arista igual al lado de la base, } H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 = \frac{1}{2} l^2$$

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{1}{6} \sqrt{2} l^3$$

$$\text{Por tanto, } \frac{1}{6} \sqrt{2} l^3 = \frac{256}{3} \sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$$

Página 45

7. Definición de logaritmo

Hazlo tú. Calcula x :

a) $\log_x 5 = 1/2$

b) $\log x^2 = -4$

a) $\log_x 5 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{1/2} = 5 \rightarrow x = 5^2 \rightarrow x = 25$

b) $\log x^2 = -4 \rightarrow 10^{-4} = x^2 \rightarrow \frac{1}{10^4} = x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{10^4}} \rightarrow x = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

8. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú. Halla el valor de $\log_3 0,3$ y de $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}$ sin utilizar la calculadora.

$$0,3 = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow \log_3 3^{-1} = -1$$

$$\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$$

9. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Si $\ln k = -1,8$, calcula:

a) $\ln(k^2 \sqrt{e})$ b) $\ln\left(\frac{k}{e}\right)^3$

a) $\ln(k^2 \sqrt{e}) = \ln k^2 + \ln \sqrt{e} = 2 \ln k + \ln e^{1/2} = 2 \cdot (-1,8) + \frac{1}{2} = -3,1$

b) $\ln\left(\frac{k}{e}\right)^3 = 3 \ln \frac{k}{e} = 3(\ln k - \ln e) = 3(-1,8 - 1) = -8,4$

10. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $\ln 3^{x-1} = 5$ b) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

a) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n \log_a m$.

$$(x-1) \ln 3 = 5 \rightarrow x-1 = \frac{5}{\ln 3} \rightarrow x = \frac{5}{\ln 3} + 1 \rightarrow x = 5,5512$$

b) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$$

$$\log \frac{x^2}{4} = \log 9; \quad \frac{x^2}{4} = 9$$

Soluciones: $x = -6, x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

Página 46

11. Errores y notación científica

Hazlo tú. Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3$

b) $1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - (1,2 \cdot 10^{-4})^2$

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3 = \left(\frac{15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^3 =$

$$= \frac{(15)^2 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{-8}} \cdot 8^3 \cdot 10^{-9} = \frac{(15)^2 \cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800 \cdot 10^{11} = 1,28 \cdot 10^{15}$$

E.A. $< 0,005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{12}}{1,28 \cdot 10^{15}} = 0,0039 = 0,39\%$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & 1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - (1,2 \cdot 10^{-4})^2 = 1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - 1,44 \cdot 10^{-8} = \\
 & = 1,5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1,44 \cdot 10^{-8} = (1,5 + 24 - 1,44) \cdot 10^{-8} = 24,06 \cdot 10^{-8} = 2,406 \cdot 10^{-7} \\
 \text{E.A. } & < 0,0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11} \\
 \text{E.R. } & < \frac{5 \cdot 10^{-11}}{2,406 \cdot 10^{-7}} = 2,078 \cdot 10^{-4} = 0,0002078 = 0,02\%
 \end{aligned}$$

12. Repartos proporcionales

Hazlo tú. Reparte 1 500 € en partes inversamente proporcionales a 15, 20 y 25.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{47}{300}$$

$$\text{Para 15} \rightarrow \frac{x}{1500} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \frac{1500 \cdot \frac{1}{15}}{\frac{47}{300}} = \frac{30\,000}{47} = 638,3 \text{ €}$$

$$\text{Para 20} \rightarrow \frac{x}{1500} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \frac{1500 \cdot \frac{1}{20}}{\frac{47}{300}} = \frac{22\,500}{47} = 478,72 \text{ €}$$

$$\text{Para 25} \rightarrow \frac{x}{1500} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} \rightarrow x = \frac{1500 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{47}{300}} = \frac{18\,000}{47} = 382,98 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 47

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$$\log_3 3^{x-1} = \log_3 173; (x-1)\log_3 3 = \log_3 173$$

$$x-1 = \log_3 173 = 4,69; x = 4,69 + 1 = 5,69$$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a + 2b)^2} = (2a + 2b)\sqrt{cd} = 2(a + b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M , x e y si sabemos que:

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2)$$

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2) = \frac{1}{4}(\ln x^2 + \ln y^3 - \ln 2^5) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 \cdot y^3}{2^5} = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ .

$$\text{E.A.} < 0,005$$

$$\text{E.R.} < \frac{0,005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3,0902 \cdot 10^{-3} = 0,003$$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 48

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , pertenecen:

$$5; -7; \frac{5}{4}; \sqrt{\frac{18}{2}}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; 4,\widehat{7}; \frac{\pi}{2}$$

$$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N} \quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.

- a) 3,181818... b) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ c) $\sqrt{8}$
 d) 1,020020002... e) $-4,0333...$ f) $\sqrt[3]{81}$
 g) 1,3999... h) 2π

$$a) 3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$$

$$b) \sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

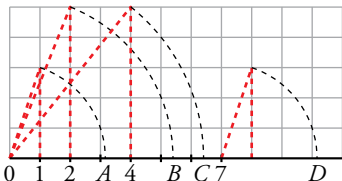
d) 1,020020002... Irracional.

$$e) -4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

$$g) 1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$$

h) 2π Irracional.

3  ¿Qué números irracionales representan los puntos: A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$$A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad B = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \quad C = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad D = 7 + \sqrt{1^2 + 3^2} = 7 + \sqrt{10}$$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

- a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ y $0,\widehat{526}$ c) $4,\widehat{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ y $-2,1$

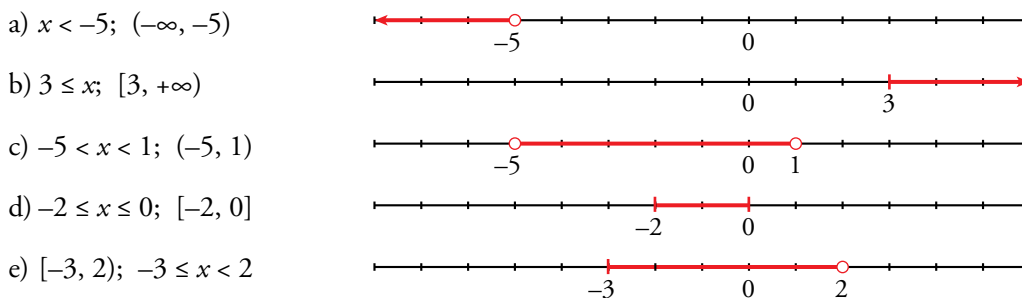
Redondea a las centésimas los números anteriores.

- a) $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ c) $4,\widehat{89}$ d) 2,098

Intervalos y valor absoluto

5 Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.

- | | |
|--|---|
| a) x es menor que -5 . | b) 3 es menor o igual que x . |
| c) x está comprendido entre -5 y 1 . | d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos. |
| e) x es mayor o igual que -3 y menor que 2 . | |



6 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $[-2, 7]$ | b) $[13, +\infty)$ | c) $(-\infty, 0)$ |
| d) $(-3, 0]$ | e) $[3/2, 6)$ | f) $(0, +\infty)$ |
| a) $-2 \leq x \leq 7$ | b) $x \geq 13$ | c) $x < 0$ |
| d) $-3 < x \leq 0$ | e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$ | f) $0 < x < +\infty$ |

7 Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:

- | | | |
|---------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ x < 7$ | b) $ x \geq 5$ | c) $ 2x < 8$ |
| d) $ x - 1 \leq 6$ | e) $ x + 2 > 9$ | f) $ x - 5 \geq 1$ |
| a) $(-7, 7)$ | b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$ | c) $(-4, 4)$ |
| d) $[-5, 7]$ | e) $(-11, 7)$ | f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$ |

8 Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.

- | | | |
|---|--------------------|-----------------------------|
| a) $\sqrt{x - 4}$ | b) $\sqrt{2x + 1}$ | c) $\sqrt{-x}$ |
| d) $\sqrt{3 - 2x}$ | e) $\sqrt{-x - 1}$ | f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$ |
| a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$ | | |
| b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ | | |
| c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$ | | |
| d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$; $(-\infty, \frac{3}{2}]$ | | |
| e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$ | | |
| f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $[-2, +\infty)$ | | |

9 Expresa como un único intervalo.

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|
| a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$ | c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ |
| d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ | e) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ | f) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$ |
| a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$ |
| c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$ | f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$ |
| e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$ | | |

10 Se llama entorno de centro a y radio r al intervalo $(a - r, a + r)$.

a) Expresa como intervalos los siguientes entornos: centro 2 y radio 0,25; centro -1 y radio 2.

b) Describe como entornos los siguientes intervalos: $I_1 = (-3, 5)$; $I_2 = (-6, -4,4)$.

a) Centro 2 y radio 0,25 $\rightarrow (2 - 0,25; 2 + 0,25) = (1,75; 2,25)$

Centro -1 y radio 2 $\rightarrow (-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $I_1 = (-3, 5)$; centro: $\frac{-3+5}{2} = 1$; radio = $5 - 1 = 4$

I_1 es un entorno de centro 1 y radio 5.

$I_2 = (-6, -4,4)$; centro: $\frac{-4,4+(-6)}{2} = -5,2$; radio = $-4,4 - (-5,2) = 0,8$

I_2 es un entorno de centro -5,2 y radio 0,8.

■ Potencias

11 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

12 Resuelve, sin utilizar calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$	b) $\sqrt[3]{343}$	c) $\sqrt[4]{625}$
d) $\sqrt{0,25}$	e) $\sqrt[3]{8^4}$	f) $\sqrt[3]{0,001}$
a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$	b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$	c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$
d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$	e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$	f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

13 Expresa como una potencia de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	b) $(-32)^{1/5}$	c) $(\sqrt[8]{2})^4$
a) $2^{-1/2}$	b) $(-2^5)^{1/5} = -2$	c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

14 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-8)^3 \cdot (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-3^2}{2} = \frac{-9}{2}$

b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$

d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$

15 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

16 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$

d) $\frac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-5} \cdot b^2 \cdot c^{-1}}$

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$

c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$

d) $\frac{c^7 \cdot a^5 \cdot c}{a^3 \cdot b^4 \cdot b^2} = \frac{a^2 \cdot c^8}{b^6}$

Página 49

Radicales

17 Introduce los factores dentro de cada raíz.

a) $2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$

e) $2\sqrt[4]{4}$

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

18 Sacar de la raíz el factor que puedas.

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2 + 4}$

i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[6]{27}$

c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$

f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$

h) $\sqrt[8]{0,0016}$

i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3} \cdot 3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4} \cdot 2^4} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

a) $\sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{20}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{3^4}, \sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{12^5}, \sqrt[12]{8^1}, \sqrt[12]{6^4} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16} \rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000} \rightarrow \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3}, \sqrt[12]{9^4}, \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10000}; \sqrt[12]{6561}; \sqrt[12]{8000} \rightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^2$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 2} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$

c) $(\sqrt[6]{32})^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}})^3 = (\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}})^3 = \sqrt[2]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz.

a) $\sqrt[4]{3\sqrt{4}}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $20\sqrt{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = 20\sqrt{a^{21}} = a^{10}\sqrt{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - \sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

25 Simplifica.

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \frac{21}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = -15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} = -3\sqrt{2 \cdot 3} + 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3} - 5\sqrt{2 \cdot 3} + 7\sqrt{2 \cdot 3} = 5\sqrt{6}$

26 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{72}$ b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$ c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} = \left(1 - \frac{12}{5} + \frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4 a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \frac{7}{5} \cdot 3\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{21}{5} - 2a - \frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a} = (4 - 2a)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

b) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $5 - 6 = -1$

c) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

d) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2) = 3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})} = \frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2} = \frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13} = -5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} = \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \frac{9\sqrt{2}\cdot 3^2-4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

29 Efectúa y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

Logaritmos

30 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 1024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$ h) $\log_{\pi} 1$ i) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10} = 10$ b) $\log 10^{-3} = -3$ c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}$ h) 0 i) $\ln e^{-1/3} = -\frac{1}{3}$

31 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ c) $\log_x \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ e) $\log_x 0,04 = -2$ f) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ b) $x^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = 3$ c) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$ e) $x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

32 Calcula el valor de x en estas igualdades:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\log 3^x = 2$ | b) $\log x^2 = -2$ | c) $7^x = 115$ |
| d) $5^{-x} = 3$ | e) $\log_7 3x = 0,5$ | f) $3^{2+x} = 172$ |
| a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$ | b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{10}$ | c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$ |
| d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$ | e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ | f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$ |

33 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\log \sqrt{148}$ | b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$ | c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$ |
| d) $\log_3 42,9$ | e) $\log_5 1,95$ | f) $\log_2 0,034$ |
| a) 1,085 | b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,16 \rightarrow e^{26,16} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$ | c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$ |
| d) $\log_3 42,9 \approx 3,42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42,9$ | e) $\log_5 1,95 \approx 0,41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1,95$ | f) $\log_2 0,034 \approx -4,88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0,034$ |

Página 50

34 Desarrolla las siguientes expresiones:

- | | |
|--|---|
| a) $\log \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ | b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$ |
|--|---|
- a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \frac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$
- b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3} e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \frac{3}{4}\ln x + 5 - \frac{1}{2}\ln y$

35 Sabiendo que $\log x = 0,28$ calcula el valor de:

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------------|
| a) $\log \frac{\sqrt[3]{x^2}}{100}$ | b) $\log 1000x^3$ | c) $\log \frac{1}{\sqrt{x}}$ | d) $\log 10x + \log \frac{1}{x^2}$ |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------------|
- a) $\log \frac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = \log \frac{x^{2/3}}{100} = \log x^{2/3} - \log 100 = \frac{2}{3}\log x - 2 = \frac{2}{3} \cdot 0,28 - 2 = -1,8133$
- b) $\log 1000x^3 = \log 1000 + \log x^3 = \log 1000 + 3\log x = 3 + 3 \cdot 0,28 = 3,84$
- c) $\log \frac{1}{\sqrt{x}} = \log 1 - \log x^{1/2} = 0 - \frac{1}{2}\log x = -\frac{1}{2} \cdot 0,28 = -0,14$
- d) $\log 10x + \log \frac{1}{x^2} = \log 10 + \log x + \log 1 - 2\log x = 1 + 0,28 + 0 - 2 \cdot 0,28 = 0,72$

36 Halla el valor de x en estas expresiones:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ | b) $\log x = \log 36 - \log 9$ |
| c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$ | d) $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$ |
- a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$
- b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$
- c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2; \ln x = \ln \frac{5^3}{10^2}; x = \frac{5^3}{5^2 \cdot 2^2}; x = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$
- d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2}; \log x = \log 2^3 - \log 5; \log x = \log \frac{8}{5}; x = \frac{8}{5}$

37 Si $\log k = x$, escribe en función de x .

a) $\log 100k$

b) $\log \frac{k}{1000}$

c) $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$

f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$

d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) \sqrt{x}

38 Averigua, en cada caso, la relación entre x , y , z .

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y$; $\log z = \log \frac{x^2}{y}$; $z = \frac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}$; $\log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}}$; $z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2} \log \frac{x}{y}$; $\log z = \log 10 - \log \sqrt{\frac{x}{y}}$; $\log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2$; $\ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2}$; $z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

Notación científica y errores

39 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \frac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

40 Expresa en notación científica y calcula: $\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$

41 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

42 Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?

Llamamos $x = n.º$ de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6} + \frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x} = \frac{x}{6x} + \frac{6}{6x} \rightarrow 3x = x + 6 \rightarrow x = 3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

43 En un concurso se reparten 20 000 € entre las tres personas que han tardado menos tiempo en realizar una prueba. La primera ha tardado 4 minutos; la segunda, 5 minutos, y la tercera, 8 minutos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una si el reparto es inversamente proporcional al tiempo invertido?

Debemos repartir 20 000 € de forma inversamente proporcional al tiempo empleado:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} = \frac{23}{40} \text{ tardarían entre los tres}$$

Al primero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 10}{23} = 8\,694,65 \text{ €}$

Al segundo le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 8}{23} = 6\,956,52 \text{ €}$

Al tercero le corresponde $\frac{20\,000 \cdot 5}{23} = 4\,347,83 \text{ €}$

44 Varios amigos se reúnen en un bar, toman 15 refrescos y pagan 18,75 € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?

$18,75 : 15 = 1,25 \text{ € por refresco.}$

$1,25 \text{ paga el primero; } 2,5 \text{ paga el segundo} \rightarrow 3,75 \text{ € entre los dos.}$

Los restantes toman $15 - 3 = 12$ refrescos.

$12 : 3 = 4$ amigos, y cada uno paga 3,75 €.

Son 6 en total. Pagan 1,25 €, 2,5 € y los otros cuatro, 3,75 € cada uno.

- 45** En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?

$450 : 30 = 15$; $15 : 75 = 0,2$ kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

$200 \cdot 0,2 = 40$ kg por día para alimentar 200 gallinas.

$800 : 40 = 20$ días podrán comer las gallinas.

- 46** Un empleado puede hacer los $\frac{2}{3}$ de un trabajo en 8 días trabajando 5 horas diarias, y otro, los $\frac{3}{4}$ del mismo trabajo en 6 días de 7 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en hacer el trabajo, dedicando 6 horas diarias?

Para hacer todo el trabajo el primero tarda: $5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{2} = 60$ horas.

Y el segundo: $7 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 56$ horas.

En 1 hora los dos juntos hacen: $\frac{1}{60} + \frac{1}{56} = \frac{29}{840}$.

Para hacer todo el trabajo tardan: $\frac{840}{29} \approx 28,96$ horas.

$28,96 : 6 \approx 4$ días 4 horas 58 minutos

- 47** Dos amigas, trabajando juntas, emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después del primer día, una de las dos lo tiene que dejar. Continúa la otra sola y tarda 6 días en acabar el trabajo. ¿En cuántos días haría el trabajo cada una aisladamente?

Después del primer día quedan por hacer los $\frac{2}{3}$ y como la segunda amiga tarda 6 días, para hacer todo el trabajo tardaría $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ días.

La primera hace por día $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ del trabajo.

Por tanto, tardaría en hacer todo el trabajo $\frac{9}{2} = 4,5$ días.

- 48** Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?

Si se aproximan a $80 + 120 = 200$ km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$t = \frac{350}{200} = 1,75$ horas = 1 hora y 45 minutos.

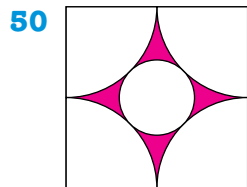
- 49** Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.

El primero recorre $\frac{1}{3}$ del camino en 1 hora.

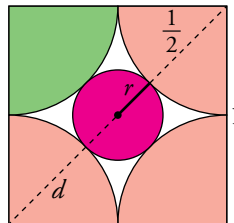
El segundo recorre $\frac{1}{5}$ del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30" en encontrarse.



50 Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Área pedida} &= A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7,9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7,98 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

E.A. $< 0,005 \text{ dm}^2$

E.R. $< \frac{0,005}{7,9849 \cdot 10^{-2}} = 6,2618 \cdot 10^{-2} = 0,062618$, que equivale al 6,26 %.

Página 51

51 La estación espacial Mir estuvo en órbita casi 15 años y durante ese tiempo dio, aproximadamente, 86 500 vueltas alrededor de la Tierra, a una altura media de 400 km. Calcula la distancia total recorrida por la Mir en esos 15 años. Redondea el resultado a las decenas de millón y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.

El radio medio de la Tierra es de 6 371 km.

La longitud de una vuelta del satélite es $2\pi \cdot (400 + 6 371) = 13 542 \pi$ km.

El total de kilómetros recorridos es:

$$13 542\pi \cdot 86 500 \approx 3,68 \cdot 10^9 = 368 \text{ decenas de millón}$$

E.A. $< 0,5 \cdot 10^7$

E.R. $< \frac{0,5 \cdot 10^7}{3,68 \cdot 10^9} = 1,3587 \cdot 10^{-3} = 0,0013 = 0,13 \%$

- 52** La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0°C , t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800°C , ¿cuál es su longitud a 200°C ? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800°C :

$$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right), \text{ luego } l_0 = \frac{125}{128}$$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200°C :

$$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0,98242\text{ m}$$

- 53** La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a $165\,000$ años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.

Un año luz es aproximadamente $9,46 \cdot 10^{12}\text{ km}$.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 1,5609 \cdot 10^{18}\text{ km}$

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}\text{ km}$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{13}}{1,5609 \cdot 10^{18}} = 3,2033 \cdot 10^{-5} = 0,000032, \text{ que equivale al } 0,0032\%.$$

La masa del Sol es, aproximadamente, $1,9891 \cdot 10^{30}\text{ kg}$.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} = 5,2711 \cdot 10^{32}\text{ kg}$

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}\text{ kg}$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{27}}{5,2711 \cdot 10^{32}} = 9,4857 \cdot 10^{-6} = 0,0000094857, \text{ que equivale al } 0,00095\%.$$

- 54** El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}\text{ cm}^3$. Halla:

- a) Su arista. b) La diagonal de una cara. c) La diagonal del cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto.

$$\text{a) } V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{6^3}} = \sqrt{6}$$

$$\text{b) Diagonal de una cara} \rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{c) Diagonal del cubo} \rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6 + 6 + 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

- 55** La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales. Llamamos a a la arista.

La superficie de cada cara es $\frac{9\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$.

Cada cara es un triángulo equilátero cuya altura es $\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

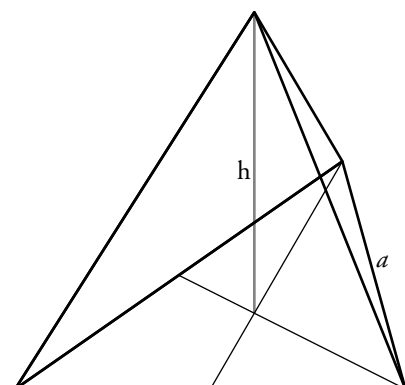
$$\text{La superficie de cada cara es: } S_{\text{CARA}} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3.$$

Como a es una longitud, $a = 3\text{ cm}$.

$$\text{La altura del tetraedro es: } h = \frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}a}{3} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{9\sqrt{3}}{4} \sqrt{3} = \frac{9}{4}\text{ cm}^3.$$



Cuestiones teóricas

56 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

- a) Hay números irracionales que son enteros.
 - b) Todo número irracional es real.
 - c) Todos los números decimales son racionales.
 - d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
- a) Falso. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.
 b) Verdadero.
 c) Falso. El número π es decimal pero no es racional, puesto que no puede expresarse como cociente de dos números enteros.
 d) Verdadero.

57 Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) x^{-2} es negativo si lo es x .
 - b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x .
 - c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.
- a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x .
 b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.
 c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

58 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

- a) $\log m + \log n = \log (m + n)$
 - b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$
 - c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$
 - d) $\log x^2 = \log x + \log x$
 - e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$
- a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$
 b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$
 c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.
 d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$
 e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

Autoevaluación

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} pertenecen:

$$-\frac{58}{45}; \frac{51}{17}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[5]{2^3}; 1,0\widehat{7}$$

$$\mathbb{N}: \frac{51}{17} \quad \mathbb{Z}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8} \quad \mathbb{Q}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7} \quad \mathbb{R}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[5]{2^3}$$

2 Expresa en forma de intervalo.

a) x es mayor que -2 y menor o igual que 5 .

b) $|x - 4| < 5$

a) $x \in (-2, 5]$

b) $x \in (-1, 9)$

3 Escribe como potencia y simplifica.

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a})$$

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a}) = (a^{3/4} \cdot a^{-1}) : (a \cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}) : (a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}) : (a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

4 Calcula y simplifica: $\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 Racionaliza.

a) $\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

b) $\frac{2}{3 - \sqrt{3}}$

a) $\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 Simplifica: $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} + \sqrt{5^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

7 Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D &= \left(\frac{3,24 \cdot 10^6}{5,1 \cdot 10^{-5}} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1} 10^{11} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \\ &= (0,63529 + 3,8) \cdot 10^{11} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = 4,4353 \cdot 6,2 \cdot 10^5 = 27,499 \cdot 10^5 = \\ &= 2,7499 \cdot 10^6 = 2,75 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

E.A. $< 0,5 \cdot 10^4$

E.R. $< \frac{0,5 \cdot 10^4}{2,75 \cdot 10^6} = 1,8182 \cdot 10^{-3} = 0,00182 = 0,18\%$

8 Aplica la definición de logaritmo y obtén x .

a) $\log_3 x = -1$ b) $\log x = 2,5$ c) $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log x = 2,5 \rightarrow x = 10^{2,5} \rightarrow x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2 \sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

9 Calcula x en cada caso.

a) $2,5^x = 0,0087$ b) $1,005^{3x} = 143$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $1,005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$$\log 1,005^{3x} = \log 143 \rightarrow 3x \log 1,005 = \log 143 \rightarrow x = \frac{\log 143}{3 \log 1,005} \approx 331,68$$

10 Expresa como un solo logaritmo y di el valor de A :

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log A$$

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log \left(\frac{5 \cdot 9}{4} \right) \rightarrow A = \frac{45}{4}$$

11 Si $\log k = 0,8$, ¿cuál es el valor de $\log 10k^3 + \log \frac{\sqrt{k}}{100}$?

$$\log 10k^3 + \log \frac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log \sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3 \log k + \frac{1}{2} \log k - 2 = 1 + 3 \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 - 2 = 1,8$$

12 El área total de un cubo es 12 cm^2 . ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.

El área total del cubo es $6a^2 = 12 \rightarrow a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$.

El área total del cilindro es $2 \cdot \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \pi \text{ cm}^2$.

