

## Página 35

### Resuelve

1. Expresa con nuestra notación el siguiente polinomio dado con la nomenclatura de Diofanto:

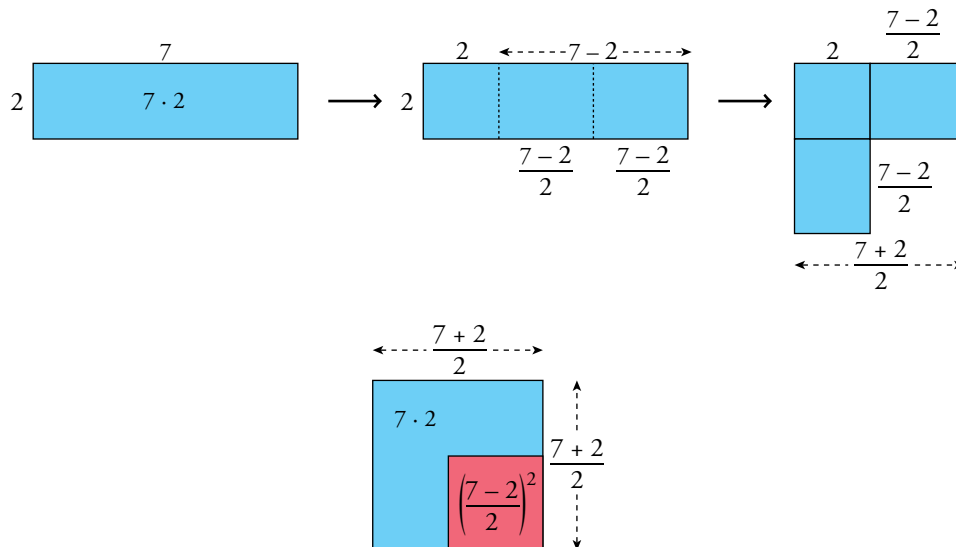
ss3 s5 M c8 x9 u1

$$3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 9x - 1$$

2. Expresa con la nomenclatura de Diofanto:  $-2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

c5 u8 M ss2 s3 x6

3. Repite gráficamente el razonamiento utilizado por Pitágoras para demostrar la igualdad de arriba, tomando  $a = 7$  y  $b = 2$ .



$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{azul}}: 7 \cdot 2 \\ A_{\text{roja}}: \left(\frac{7-2}{2}\right)^2 \\ A_{\text{azul + roja}}: \left(\frac{7+2}{2}\right)^2 \end{array} \right\} A_{\text{azul}} = A_{\text{azul + roja}} - A_{\text{roja}} \rightarrow 7 \cdot 2 = \left(\frac{7+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-2}{2}\right)^2 \rightarrow 14 = 14$$

## 2 Regla de Ruffini

### Página 38

1. Calcula el cociente y el resto de la división de  $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$  entre los siguientes polinomios:

a)  $x - 1$

b)  $x + 1$

c)  $x - 2$

d)  $x - 4$

e)  $x + 4$

f)  $x - 3$

Indica en cada caso si la división es entera o exacta.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{a)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente:  $x^3 + 4x^2 + x + 4$

Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{b)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & & -1 & -2 & 5 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & 8 & -12 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente:  $x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

Resto: -12

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{c)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & & 2 & 10 & 14 & 34 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 17 & 30 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente:  $x^3 + 5x^2 + 7x + 17$

Resto: 30

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{d)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & & 4 & 28 & 100 & 412 \\ \hline & 1 & 7 & 25 & 103 & 408 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente:  $x^3 + 7x^2 + 25x + 103$

Resto: 408

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{e)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -4 & & -4 & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente:  $x^3 - x^2 + x - 1$

Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{f)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & & 3 & 18 & 45 & 144 \\ \hline & 1 & 6 & 15 & 48 & 140 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente:  $x^3 + 6x^2 + 15x + 48$

Resto: 140

**2. Realiza la división de  $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$  entre cada uno de los siguientes polinomios y expresa el resultado así: cociente +  $\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$ .**

a)  $x - 1$

b)  $2x - 1$

c)  $x + 2$

d)  $2x + 4$

e)  $2x + 3$

f)  $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1 & & 4 & 16 & 21 \\ \hline & 4 & 16 & 21 & \boxed{15} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 4x^2 + 16x + 21 + \frac{15}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1/2 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 4 & 14 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x - 1} = \frac{4x^2 + 14x + 12}{2} = 2x^2 + 7x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x + 2} = 4x^2 + 4x - 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{d)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 4} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{e)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -3/2 & & -6 & -9 & 6 \\ \hline & 4 & 6 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 3} = \frac{4x^2 + 6x - 4}{2} = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{f)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 2 & & 8 & 40 & 90 \\ \hline & 4 & 20 & 45 & \boxed{84} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 4x^2 + 20x + 45 + \frac{84}{x - 2}$$

**Página 39**

**3. Utiliza la regla de Ruffini para hallar  $P(a)$  en los siguientes casos:**

a)  $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$ ,  $a = 2$ ,  $a = -5$ ,  $a = 10$

b)  $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$ ,  $a = -3$ ,  $a = 1$ ,  $a = 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 14 & 28 & 46 & 96 \\ \hline & 7 & 14 & 23 & 48 & 72 \end{array} \quad P(2) = 72$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & -35 & 175 & -850 & 4240 \\ \hline & 7 & -35 & 170 & -848 & 4216 \end{array} \quad P(-5) = 4216$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 10 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 70 & 700 & 6950 & 69520 \\ \hline & 7 & 70 & 695 & 6952 & 69496 \end{array} \quad P(10) = 69496$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & -9 & 51 & -162 \\ \hline & 3 & -17 & 54 & -162 \end{array} \quad P(-3) = -162$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 3 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & -2 \end{array} \quad P(1) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 24 & 128 & 1048 \\ \hline & 3 & 16 & 131 & 1048 \end{array} \quad P(8) = 1048$$

### 3 Raíz de un polinomio. Búsqueda de raíces

**Página 41**

**1. Indica, sin realizar las operaciones, si  $x = -3$  puede ser raíz de cada uno de estos polinomios:**

a)  $P(x) = x^2 - x - 12$

b)  $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

c)  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

d)  $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

**En caso afirmativo, comprueba si es o no raíz.**

a)  $x = -3$  puede ser raíz de  $P(x) = x^2 - x - 12$ , puesto que su término independiente,  $-12$ , es múltiplo de  $-3$ . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array} \quad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

b)  $x = -3$  no puede ser raíz de  $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$ , puesto que su término independiente,  $+8$ , no es múltiplo de  $-3$ .

c)  $x = -3$  puede ser raíz de  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$ , puesto que su término independiente,  $-27$ , es múltiplo de  $-3$ . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -12 \end{array} \quad x = -3 \text{ no es raíz de } P(x).$$

d)  $x = -3$  puede ser raíz de  $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ , puesto que su término independiente,  $+3$ , es múltiplo de  $-3$ . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & +1 & +3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

**2. Indica las posibles raíces enteras de cada uno de los polinomios del ejercicio anterior. Comprueba cuáles lo son.**

a)  $P(x) = x^2 - x - 12$

Las posibles raíces enteras son:  $+1; -1; +2; -2; +3; -3; +4; -4; +6; -6; +12; -12$ .

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -12 \end{array}$$

$x = 1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -10 \end{array}$$

$x = -1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -10 \end{array}$$

$x = 2$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & -6 \end{array}$$

$x = -2$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 \end{array}$$

$x = 3$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$x = -3$  sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 4 & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$x = 4$  sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 2 y ya hemos encontrado sus dos raíces, el resto no serán raíces.

b)  $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +2; -2; +4; -4; +8; -8.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{array}$$

$x = 1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -1 & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & 12 \end{array}$$

$x = -1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 2 & 4 & 12 & 22 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 11 & 30 \end{array}$$

$x = 2$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -2 & 4 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -13 & 34 \end{array}$$

$x = -2$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 4 & 16 & 72 & 284 \\ \hline & 1 & 4 & 18 & 71 & 292 \end{array}$$

$x = 4$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -4 & 16 & -72 & 292 \\ \hline & 1 & -4 & 18 & -73 & 300 \end{array}$$

$x = -4$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 8 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 8 & 64 & 528 & 4216 \\ \hline & 1 & 8 & 66 & 527 & 4224 \end{array}$$

$x = 8$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -8 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -8 & 64 & -528 & 4232 \\ \hline & 1 & -8 & 66 & -529 & 4240 \end{array}$$

$x = -8$  no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras dado que ya no hay más posibilidades.

c)  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +3; -3; +9; -9; +27; -27.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & 4 & -1 & -28 \end{array}$$

$x = 1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -1 & -2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & -20 \end{array}$$

$x = -1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 3 & 18 & 39 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & 12 \end{array}$$

$x = 3$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -12 \end{array}$$

$x = -3$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 9 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 9 & 108 & 927 \\ \hline & 1 & 12 & 103 & 900 \end{array}$$

$x = 9$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -9 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -9 & 54 & -441 \\ \hline & 1 & -6 & 49 & -468 \end{array}$$

$x = -9$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 27 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 27 & 810 & 21735 \\ \hline & 1 & 30 & 805 & 21708 \end{array}$$

$x = 27$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -27 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -27 & 648 & -17361 \\ \hline & 1 & -24 & 643 & 17388 \end{array}$$

$x = -27$  no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras.

d)  $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +3; -3.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & 1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 8 \end{array}$$

$x = 1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & -1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

$x = -1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & 3 & 18 & 57 \\ \hline & 1 & 6 & 19 & 60 \end{array}$$

$x = 3$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x = -3$  sí es raíz.

Como ya hemos probado todas las posibilidades, el polinomio solo tiene una raíz entera,  $x = -3$ .

- 3. El polinomio  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$  es divisible por  $x - a$  para dos valores enteros de  $a$ .**

**Localízalos y da el cociente en ambos casos.**

El polinomio  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$  es divisible por  $(x - 2)$  y por  $(x + 3)$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & 0 \end{array} \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x - 2} = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & -3 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x + 3} = x^3 - 2x - 4$$

- 4. Comprueba que el polinomio  $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$  no es divisible por  $x - a$  para ningún valor de  $a$  entero.**

Las posibles raíces enteras de  $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$  son:  $+1, -1; +2; -2; +5; -5; +10$  y  $-10$ .  
Comprobamos que ninguna de ellas lo es:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 1 & 2 & 9 & 11 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 11 & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -1 & 0 & -7 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & -5 & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 2 & 6 & 26 & 56 \\ \hline & 1 & 3 & 13 & 28 & 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -2 & 2 & -18 & 32 \\ \hline & 1 & -1 & 9 & -16 & 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 5 & 30 & 185 & 935 \\ \hline & 1 & 6 & 37 & 187 & 945 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -5 & 20 & -135 & 665 \\ \hline & 1 & -4 & 27 & -133 & 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 10 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 10 & 110 & 1170 & 11720 \\ \hline & 1 & 11 & 117 & 1172 & 11730 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -10 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -10 & 90 & -970 & 9680 \\ \hline & 1 & -9 & 97 & -968 & 9690 \end{array}$$

- 5. Inventa un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, -2 y -1.**

Una posible solución es:  $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = x^3 - 7x - 6$

- 6. Inventa un polinomio de cuarto grado que no tenga raíces.**

Una posible solución es:  $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

- 7. Inventa un polinomio de cuarto grado que tenga solo dos raíces:  $x = 2$  y  $x = -3$ .**

Una posible solución es:  $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

- 8. Inventa un polinomio de segundo grado que tenga como raíz doble  $x = -3$ .**

Una posible solución es:  $P(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

- 9. Inventa un polinomio que no tenga raíces:**

a) Que sea de grado 5.

b) Que sea de 4.º grado.

a) Un polinomio de grado impar seguro que tiene alguna raíz.

b) Una posible solución:  $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

## 4 Factorización de polinomios

### Página 43

#### 1. Factoriza los siguientes polinomios:

a)  $3x^2 + 2x - 8$

b)  $3x^5 - 48x$

c)  $2x^3 + x^2 - 5x + 12$

d)  $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e)  $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

f)  $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

$$a) x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$$

$$b) 3x^5 - 48x = x(3x^4 - 48) = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$$

c) Probamos con los divisores enteros de 12 y no encontramos ningún resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -5 & 12 \\ -3 & & -6 & 15 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & -18 \end{array}$$

No podemos factorizar el polinomio  $2x^3 + x^2 - 5x + 12$ .

$$d) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ 4 & & 4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2(x + 1)$$

e)  $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x - 5)(x + 4)(x + 3)$$

$$f) \begin{array}{r|rrrrr} & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\ 1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\ \hline & 9 & -27 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & & 27 & 0 & -3 & \\ \hline & 9 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$$

$$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x - 3)(3x + 1)(3x - 1)$$



## 5 Divisibilidad de polinomios

### Página 45

**1. Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:**

a)  $P(x) = x^3 - 7x^2$  y  $Q(x) = x^3 - 7x$

b)  $P(x) = x^3 - 7x^2$  y  $Q(x) = x^2 - 7x$

c)  $P(x) = x^4 - 3x - 10$  y  $Q(x) = x - 2$

a)  $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x^2 - 7) \end{array} \right\}$  No existe ninguna relación de divisibilidad.

b)  $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x - 7) \end{array} \right\}$   $Q(x)$  divide a  $P(x)$ .

c) 
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} P(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \\ Q(x) = x - 2 \end{array} \right\}$   $Q(x)$  divide a  $P(x)$ .

**2. Busca dos polinomios de 3.º grado que sean divisibles por  $x - 5$  y  $x$ . Calcula su máx.c.d. y su mín.c.m.**

Por ejemplo:

$$x(x - 5)(x - 2) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$x(x - 5)x = x^3 - 5x^2$$

$$\text{máx.c.d. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x(x - 5)$$

$$\text{mín.c.m. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x^2(x - 5)(x - 2)$$

**3. Indica cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles. Descompón en factores los que no lo sean.**

a)  $x^2 - 3x + 2$

b)  $x^2 - 5x + 6$

c)  $3x^2 + 5x$

d)  $3x^2 - 5x - 2$

e)  $3x^2 - 5x + 3$

f)  $3x^3 - 5x^2 + 3x$

a)  $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

b)  $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

c)  $3x^2 + 5x = x(3x + 5)$

d)  $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{matrix} 2 \\ -1/3 \end{matrix}$

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

e)  $x = \frac{5 \pm \sqrt{26 - 36}}{6}$  No tiene solución.

$$3x^2 - 5x + 3 \text{ es irreducible.}$$

f)  $3x^3 - 5x^2 + 3x = x(3x^2 - 5x + 3)$

$$3x^2 - 5x + 3 \text{ es irreducible (apartado e).}$$

**4. Halla mentalmente (sin operar) el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes pares de polinomios:**

a)  $x^2 - 1$  y  $(x + 1)^2$

b)  $x^2 + x$  y  $x^2 - x$

c)  $x^3 - x$  y  $x^2 - 1$

d)  $x^2 + 1$  y  $x^2$

a) máx.c.d. =  $(x + 1)$

b) máx.c.d. =  $x$

mín.c.m. =  $(x + 1)^2(x - 1)$

mín.c.m. =  $x(x + 1)(x - 1)$

c) máx.c.d. =  $(x + 1)(x - 1)$

d) máx.c.d. =  $1$

mín.c.m. =  $x(x + 1)(x - 1)$

mín.c.m. =  $(x^2 + 1)x^2$

**5. Halla el máx.c.d. y el mín.c.m. de  $P$  y  $Q$  en cada caso:**

a)  $P(x) = x^2 - 9$ ,  $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b)  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$ ,  $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c)  $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5)$ ,  $Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

a)  $P(x) = (x + 3)(x - 3)$      $Q(x) = (x - 3)^2$

máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x - 3$

mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = (x - 3)^2(x + 3)$

b)  $P(x) = x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4)(x - 3)$      $Q(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$

máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x(x - 4)$

mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 4)(x - 3)(x + 1)$

c)  $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5)$      $Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x(x - 3)$

mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = x^3(x - 3)^2(x + 5)(x^2 + x + 2)$

**6.  $P(x) = (x - 2)^2 x^2$ . Busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x$

b) mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$

$P(x) = (x - 2)^2 x^2$

Si máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x = x(x - 2)$  y

mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$ ,

debe ser  $Q(x) = x(x - 2)(x + 5)$

## 6 Fracciones algebraicas

### Página 46

#### Cálculo mental

#### 1. Simplifica estas fracciones:

a)  $\frac{2x}{x^2+x}$       b)  $\frac{x+1}{(x+1)^2}$       c)  $\frac{x+1}{x^2-1}$       d)  $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$       e)  $\frac{x^2-2x}{x^2-3x}$       f)  $\frac{x^3-4x^2}{x^3}$

a)  $\frac{2}{x+1}$       b)  $\frac{1}{x+1}$       c)  $\frac{1}{x-1}$       d)  $x-3$       e)  $\frac{x-2}{x-3}$       f)  $\frac{x-4}{x}$

#### 2. Di si cada par de fracciones son equivalentes o no.

a)  $\frac{x-3}{x^2-3x}$  y  $\frac{x}{x^2}$       b)  $\frac{x}{x-1}$  y  $\frac{x-1}{x}$       c)  $\frac{1}{x-1}$  y  $\frac{x+1}{x^2-1}$

a)  $\frac{x-3}{x^2-3x} = \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \rightarrow$  Son equivalentes.

b)  $\frac{x}{x-1} \neq \frac{x-1}{x} \rightarrow x^2 \neq (x-1)^2$ . No son equivalentes.

c)  $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2-1} \rightarrow$  Son equivalentes.

#### 1. Simplifica las siguientes fracciones:

a)  $\frac{2x^2-6x}{4x^3-2x}$       b)  $\frac{(x-3)^2 x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)}$       c)  $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}$       d)  $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}$

a)  $\frac{2x^2-6x}{4x^3-2x} = \frac{2x(x-3)}{2x(2x^2-1)} = \frac{x-3}{2x^2-1}$

b)  $\frac{(x-3)^2 x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)}$

c)  $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2} = \frac{(x+3)(x^2+1)}{x^2(x+3)} = \frac{x^2+1}{x^2}$

d)  $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24} = \frac{x(x^2-5x+6)}{x^3-x^2-14x+24} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+4)} = \frac{x}{x+4}$

#### 2. Comprueba si cada par de fracciones son equivalentes:

a)  $\frac{x^3-x}{x^3+x^2}$  y  $\frac{3x-3}{3x}$       b)  $\frac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}$  y  $\frac{x-3}{3x-x^2}$

a)  $\frac{x^3-x}{x^3+x^2} = \frac{x(x^2-1)}{x(x^2+x)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x} = \frac{3x-3}{3x}$ . Son equivalentes.

b)  $\frac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x} = \frac{(x+5)^2}{x(x+5)^2} = \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x(x-3)} = \frac{x-3}{x^2-3x} \neq \frac{x-3}{3x-x^2}$ . No son equivalentes.

**Página 47**

**Cálculo mental**

**1. Reduce a común denominador.**

a)  $\frac{3x+1}{x^2}$  y  $\frac{3}{x}$

b)  $\frac{5}{x-1}$  y  $\frac{x}{(x+1)(x-1)}$

c)  $\frac{3}{x+1}$  y  $\frac{2}{x^2-1}$

a)  $\frac{3x+1}{x^2}$ ;  $\frac{3x}{x^2}$

b)  $\frac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)}$ ;  $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

c)  $\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3(x-1)}{x^2-1}$ ;  $\frac{2}{x^2-1}$

**2. Opera.**

a)  $\frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x}$

b)  $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$

c)  $\frac{2x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$

d)  $\frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5}$

a)  $\frac{1}{x^2}$

b)  $\frac{3x-1}{x^2-1}$

c)  $2(x-2)$

d)  $\frac{x}{x+5}$

**3. Efectúa las operaciones y simplifica el resultado.**

a)  $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x}$

b)  $\frac{3}{x} \left( \frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right)$

c)  $\frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2}$

d)  $\frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2}$

e)  $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2}$

f)  $\frac{x^2}{x-1} : \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$

a)  $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x} = \frac{(2x+1) \cdot x - (x^2+5)}{x^2+3x} = \frac{2x^2+x-x^2-5}{x^2+3x} = \frac{x^2+x-5}{x^2+3x}$

b)  $\frac{3}{x} \left( \frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3}{x} \left( \frac{x(x-1)-x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3(x-1-x)}{x^2-1} = \frac{-3}{x^2-1}$

c)  $\frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2} = \frac{5(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-2)} = 5(x-3)$

d)  $\frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2} = \frac{(3x-1)(x-2) - (x+3) + x(2x+5)}{x(x-2)} =$   
 $= \frac{3x^2-7x+2-x-3+2x^2+5x}{x(x-2)} = \frac{5x^2-3x-1}{x(x-2)}$

e)  $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2} = \frac{(2x+1) \cdot 2 \cdot (2x-1)}{x^2(2x-1)} = \frac{2(2x+1)}{x^2}$

f)  $\frac{x^2}{x-1} : \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x-1} : \left( \frac{x-1-x}{x(x-1)} \right) = \frac{x^3(x-1)}{-(x-1)} = -x^3$

**Página 48**

**Hazlo tú. Opera y simplifica.**

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2}\right) : \frac{1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2}\right) : \frac{1}{x-2} &= \left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3x-6}{(x-2)^2}\right) : \frac{1}{x-2} = \frac{6}{(x-2)^2} : \frac{1}{x-2} = \\ &= \frac{6(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{6}{x-2} \end{aligned}$$

**Hazlo tú. Calcula el valor de  $k$  para que esta división sea exacta:**

$$(2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 12) : (x + 2)$$

Para que  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 12$  sea divisible entre  $(x + 2)$ , ha de verificarse que  $P(-2) = 0$ :

$$P(-2) = 2(-2)^4 - 5(-2)^3 + k(-2)^2 - 12 = 0 \rightarrow 60 + 4k = 0 \rightarrow k = -15$$

**Hazlo tú. Factoriza.**

a)  $x^2m + x^2n - ym - yn$

b)  $x^3 + a^3$

a)  $x^2m + x^2n - ym - yn = x^2(m + n) - y(m + n) = (x^2 - y)(m + n)$

b)  $x^3 + a^3$  puede tener como raíces:  $a; -a; a^2; -a^2; a^3; -a^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & 0 \end{array} \rightarrow x^2 - ax + a^2, \text{ como en el ejemplo resuelto, vemos que no tiene solución si } a \neq 0.$$

$x = -a$  es raíz


$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

## Ejercicios y problemas

Página 49

### Practica

#### Polinomios. Operaciones

1.  Dados los polinomios  $P(x) = x^3 - 5x^2 - 3$ ;  $Q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$  y  $R(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ , calcula:

a)  $P(x) + Q(x) - R(x)$

c)  $P(x) \cdot Q(x)$

a)  $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 3 \\ - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ -x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\ \hline -\frac{29}{6}x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

c)  $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 3 \\ - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ \hline -x^3 + 5x^2 + 3 \\ 2x^4 - 10x^3 - 6x \\ -\frac{1}{3}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^2 \\ \hline -\frac{1}{3}x^5 + \frac{11}{3}x^4 - 11x^3 + 6x^2 - 6x + 3 \end{array}$$

b)  $2P(x) - 3Q(x)$

d)  $Q(x) \cdot R(x)$

b)  $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 10x^2 - 6 \\ x^2 - 6x + 3 \\ \hline 2x^3 - 9x^2 - 6x - 3 \end{array}$$

d)  $Q(x) \cdot R(x)$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline \frac{1}{6}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\ -\frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline -\frac{1}{3}x^5 + \frac{13}{6}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

2.  Efectúa y simplifica el resultado.

a)  $(2y + x)(2y - x) + (x + y)^2 - x(y + 3)$

b)  $3x(x + y) - (x - y)^2 + (3x + y)y$

c)  $(2y + x + 1)(x - 2y) - (x + 2y)(x - 2y)$

d)  $(x + y)(2x - y)(x + 2y)$

a)  $4y^2 - x^2 + x^2 + 2xy + y^2 - xy - 3x = 5y^2 + xy - 3x$

b)  $3x^2 + 3xy - x^2 + 2xy - y^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 8xy$

c)  $2yx - 4y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - x^2 + 4y^2 = x - 2y$

d)  $(2x^2 - xy + 2xy - y^2)(x + 2y) = (2x^2 + xy - y^2)(x + 2y) =$   
 $= 2x^3 + 4x^2y + x^2y + 2xy^2 - xy^2 - 2y^3 = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 - 2y^3$

**3. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:**

a)  $\frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2}$

b)  $\frac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10} - \frac{(3x^2+2)^2}{15} + \frac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c)  $\frac{(x-1)^3}{8} + \frac{3}{4}x(x+2)^2 - \frac{x^3}{10}$

a)  $20 \left[ \frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2} \right] = 12x^2 + 60x - 5(4x^2 + 4x + 1) + 10(x^2 - 16) =$

$= 12x^2 + 60x - 20x^2 - 20x - 5 + 10x^2 - 160 = 2x^2 + 40x - 165$

b)  $3(8x^4 + 15x^2 - 2) - 2(9x^4 + 12x^2 + 4) + 5(4x^2 - 9) =$

$= 24x^4 + 45x^2 - 6 - 18x^4 - 24x^2 - 8 + 20x^2 - 45 = 6x^4 + 41x^2 - 59$

c)  $40 \left( \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8} + \frac{3x^3 + 12x^2 + 12x}{4} - \frac{x^3}{10} \right) =$

$= 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5 + 30x^3 + 120x^2 + 120x - 4x^3 = 31x^3 + 105x^2 + 135x - 5$

**4. Expresa como producto de dos binomios.**

a)  $49x^2 - 16$

b)  $9x^4 - y^2$

c)  $81x^4 - 64x^2$

d)  $25x^2 - 3$

e)  $2x^2 - 100$

f)  $5x^2 - 2$

a)  $(7x + 4)(7x - 4)$

b)  $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c)  $(9x^2 + 8x)(9x^2 - 8x)$

d)  $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e)  $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$

f)  $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

**5. Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:**

a)  $16x^2 + (\dots) - 8xy$

b)  $(\dots) + 25y^2 + 60xy$

c)  $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + (\dots)$

d)  $(\dots) + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y$

a)  $16x^2 + y^2 - 8xy = (4x - y)^2$

b)  $36x^2 + 25y^2 + 60xy = (5y + 6x)^2$

c)  $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + 3xy = \left(\frac{3}{4}x + 2y\right)^2$

d)  $4x^4 + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y = \left(2x^2 - \frac{y}{3}\right)^2$

**6. Sacar factor común e identificar los productos notables como en el ejemplo.**

•  $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a)  $20x^3 - 60x^2 + 45x$

b)  $27x^3 - 3xy^2$

c)  $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$

d)  $4x^4 - 81x^2y^2$

a)  $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$

b)  $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c)  $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$

d)  $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

**7. ▢** Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a)  $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b)  $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c)  $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ -7x^2 + 14x - 7 \quad 7 \\ \hline 9x - 4 \end{array}$$

COCIENTE: 7  
RESTO:  $9x - 4$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3 \quad | \quad x^2 - 2x \\ -2x^3 + 4x^2 \quad 2x - 3 \\ \hline -3x^2 \\ 3x^2 - 6x \\ \hline -x - 3 \end{array}$$

COCIENTE:  $2x - 3$   
RESTO:  $-x - 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x + 4 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ -x^3 + x^2 - x \quad x - 4 \\ \hline -4x^2 + x \\ 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline -3x + 8 \end{array}$$

COCIENTE:  $x - 4$   
RESTO:  $-3x + 8$

**8. ▢** Divide y expresa en cada caso así:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

a)  $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b)  $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c)  $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

d)  $(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1 \quad + \quad 4x - 1 \quad | \quad x^3 - 2x + 1 \\ -3x^5 + 6x^3 - 3x^2 \quad 3x^2 + 4 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 \\ -4x^3 + 8x - 4 \\ \hline -3x^2 + 12x - 5 \end{array}$$

$$\frac{3x^5 - 2x^3 + 4x - 1}{x^3 - 2x + 1} = 3x^2 + 4 + \frac{-3x^2 + 12x - 5}{x^3 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 3x - 2 \quad + \quad 3x - 2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^4 + x^2 \quad x^2 - 5x - 1 \\ \hline -5x^3 - x^2 \\ 5x^3 + 5x \\ \hline -x^2 + 8x \\ x^2 + 1 \\ \hline 8x - 1 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 1} = x^2 - 5x - 1 + \frac{8x - 1}{x^2 + 1}$$



$$\begin{array}{r}
 c) \quad 4x^5 \quad + 3x^3 \quad - 2x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-4x^5 + 4x^4 - 4x^3} \\
 4x^4 - x^3 \\
 \underline{-4x^4 + 4x^3 - 4x^2} \\
 3x^3 - 4x^2 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 - 3x} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{x^2 - x + 1} \\
 -6x + 1
 \end{array}
 \qquad
 \frac{4x^5 + 3x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 + \frac{-6x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 1 \\ x \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 + 5x^2 - x} \\
 2x + 1
 \end{array}
 \qquad
 \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 1} = x + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 1}$$

**9.**  Expresa las siguientes divisiones de la forma  $D = d \cdot c + r$ .

a)  $(6x^3 + 5x^2 - 9x) : (3x - 2)$

b)  $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

c)  $(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5) : (-2x^3 + x - 5)$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 2 \\ 2x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-6x^3 + 4x^2} \\
 9x^2 \\
 \underline{-9x^2 + 6x} \\
 -3x \\
 \underline{3x - 2} \\
 -2
 \end{array}$$

$$6x^3 + 5x^2 - 9x = (3x - 2)(2x^2 + 3x - 1) - 2$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} -2x^3 + x - 5 \\ -2x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-4x^4 \quad + 2x^2 - 10x} \\
 2x^3 \quad - x \\
 \underline{-2x^3 \quad + x - 5} \\
 0
 \end{array}$$

$$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = (-2x^3 + x - 5)(-2x - 1)$$

**10.** Efectúa las siguientes divisiones:

a)  $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (2x^2 + 2x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 3x - 1 & 2x^2 + 2x \\ -2x^3 - 2x^2 & \\ \hline -3x^2 + 3x - 1 & \\ + 3x^2 + 3x & \\ \hline 6x - 1 & \end{array} \quad x - \frac{3}{2}$$

b)  $(x^4 - x^3 - 3x + 1) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 3x + 1 & 2x^2 - 1 \\ -x^4 + \frac{1}{2}x^2 & \\ \hline -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 & \\ + x^3 - \frac{1}{2}x & \\ \hline + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 & \\ - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} & \\ \hline - \frac{7}{2}x + \frac{5}{4} & \end{array}$$

**Regla de Ruffini. Aplicaciones**

**11.** Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)  $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

c)  $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|llll} 2 & 5 & -3 & 1 & -2 \\ & & 10 & 14 & 30 \\ \hline & 5 & 7 & 15 & 28 \end{array}$$

COCIENTE:  $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

$$\begin{array}{r|llll} 3 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ & & -3 & -9 & -15 \\ \hline & -1 & -3 & -5 & -15 \end{array}$$

COCIENTE:  $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

b)  $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

d)  $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|lllll} -1 & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\ & & -1 & 6 & -6 & -1 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

COCIENTE:  $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

$$\begin{array}{r|lllll} -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ & & -2 & 10 & -20 & 40 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -20 & 45 \end{array}$$

COCIENTE:  $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

**12.** Utiliza la regla de Ruffini para calcular  $P(3)$ ,  $P(-5)$  y  $P(7)$  en los siguientes casos:

a)  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

$$\begin{array}{r|llll} 3 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ & & 6 & 3 & 30 \\ \hline & 2 & 1 & 10 & 33 \end{array} \quad P(3) = 33$$

$$\begin{array}{r|llll} -5 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ & & -10 & 75 & -410 \\ \hline & 2 & -15 & 82 & -407 \end{array} \quad P(-5) = -407$$


$$\begin{array}{r|llll} 7 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ & & 14 & 63 & 490 \\ \hline & 2 & 9 & 70 & 493 \end{array} \quad P(7) = 493$$

b)  $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

$$\begin{array}{r|lllll} 3 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 61 \end{array} \quad P(3) = 61$$

$$\begin{array}{r|lllll} -5 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ & & -5 & 25 & -110 & 550 \\ \hline & 1 & -5 & 22 & -110 & 557 \end{array} \quad P(-5) = 557$$

$$\begin{array}{r|lllll} 7 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ & & 7 & 49 & 322 & 2254 \\ \hline & 1 & 7 & 46 & 322 & 2261 \end{array} \quad P(7) = 2261$$

**13.**  Averigua cuáles de los números 1, -1, 2, -2, 3, -3 son raíces de los polinomios siguientes:

a)  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b)  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -24 \neq 0 \end{array}$$

Son raíces de  $P(x)$ : 1, -2 y 3.

b)


$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & -60 \neq 0 \end{array}$$

3 es una raíz de  $Q(x)$  (no probamos con 2 y -2 porque no son divisores de -3).

**14.**  Utiliza la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)  $(4x^2 - 8x + 3) : (4x - 2)$

b)  $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (2x - 3)$

c)  $(3x^3 - 2x - 1) : (3x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 3 \\ & & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

$$4x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{4} \cdot (4x - 6)$$

$$\text{Resto} = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 2 & -4 & 3 & -2 \\ & & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Resto} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 0 & -2 & -1 \\ & & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \hline & 3 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \end{array}$$

$$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{3} \cdot \left(3x^2 - x - \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Resto} = -\frac{4}{9}$$

Página 50

15. Calcula el valor de  $m$  para que las siguientes divisiones tengan el resto que se indica en cada caso:

a)  $(x^2 - 5x + m) : (x - 2)$  Resto = 0

b)  $(x^3 - 2x^2 - x + m) : (x + 1)$  Resto = -1

c)  $(2x^3 - 12x + 2m) : (x - 3)$  Resto = -5

d)  $(x^2 - mx + 3) : (x + 3)$  Resto = 0

a) Utilizamos el teorema del resto.

b)  $P(-1) = -1$

$P(2) = 0$

$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + m = -1$

$2^2 - 5 \cdot 2 + m = 0$

$-1 - 2 \cdot 1 + 1 + m = -1$

$4 - 10 + m = 0$ , luego  $m = 6$

$-1 - 2 + 1 + m = -1$ , luego  $m = 1$

c)  $P(3) = -5$

d)  $P(-3) = 0$

$2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 2m = -5$

$(-3)^2 - m \cdot (-3) + 3 = 0$

$2 \cdot 27 - 36 + 2m = -5$

$9 + 3m + 3 = 0$

$54 - 36 + 2m = -5$

$3m = -12$ , luego  $m = -4$

$2m = -5 - 18$ , luego  $m = -\frac{23}{2}$

16. Busca los valores de  $a$  para los cuales el polinomio  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$  es divisible por  $x - a$ .

Las posibles raíces de  $P(x)$  son: +1; -1; +2; -2; +3; -3; +6; -6. Veamos cuáles son raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}$$

$x = 1$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x = -1$  sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$x = 2$  sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -2 & 12 & -26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -20 \end{array}$$

$x = -2$  no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x = 3$  sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 3, puede tener como máximo tres raíces, y ya las hemos encontrado. Por tanto,  $P(x)$  es divisible por  $(x + 1)$ ,  $(x - 2)$  y  $(x - 3)$ .

### Factorización de polinomios

17. Sacar factor común y utilizar las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a)  $3x^3 - 12x$

b)  $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c)  $45x^2 - 5x^4$

d)  $x^4 + x^2 + 2x^3$

e)  $x^6 - 16x^2$

f)  $16x^4 - 9$

a)  $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b)  $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c)  $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d)  $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e)  $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f)  $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

**18. Factoriza los siguientes polinomios:**

a)  $x^2 + 4x - 5$

b)  $x^2 + 8x + 15$

c)  $7x^2 - 21x - 280$

d)  $3x^2 + 9x - 210$

e)  $2x^2 - 9x - 5$

f)  $3x^2 - 2x - 5$

g)  $4x^2 + 17x + 15$

h)  $-x^2 + 17x - 72$

a)  $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

b)  $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c)  $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

d)  $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

e)  $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

f)  $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

g)  $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

h)  $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

**19. Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:**

a)  $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b)  $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a)  $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b)  $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

**20. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:**

a)  $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b)  $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c)  $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d)  $x^4 - 13x^2 + 36$

a)	1	2	-1	-2
	1	3	2	0
	1	3	2	0
	-1		-1	-2
	1	2		0

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

b)	3	-15	12
	1	3	-12
	3	-12	0
	4		12
	3		0

$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

c)	1	-9	15	-7
	1	1	-8	7
	1	-8	7	0
	1	1	-7	
	1	-7		0

$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$

Sus raíces son 1 y 7.

d)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Sus raíces son 2, 3 y -3.

**21. Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a)  $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b)  $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c)  $x^3 - x - 6$

d)  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e)  $6x^3 + 13x^2 - 4$

f)  $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Raíz: 3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -19 & 60 \\ -3 & & -6 & 39 & -60 \\ \hline & 2 & -13 & 20 & 0 \\ 4 & & 8 & -20 & \\ \hline & 2 & -5 & & 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$$

Raíces: -3, 4 y  $\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

Raíz: 2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 4 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & & -4 & -4 & -1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & & 0 \end{array}$$

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$$

$$= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$$

Raíces: 1, -1 y  $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6x^3 + 13x^2 - 4 = 6(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$$

Raíces: -2,  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{2}{3}$

$$6x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & -25 & -75 \\ -3 & & -12 & 0 & 75 \\ \hline & 4 & 0 & -25 & 0 \end{array}$$

$$4x^3 + 12x^2 - 25x - 75 = (x + 3)(2x + 5)(2x - 5)$$

Raíces: -3,  $-\frac{5}{2}$  y  $\frac{5}{2}$

$$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$$

**22. Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:**

a) 0, 1 y 2

b) -1 y 3

c) 0 y 5

a)  $P(x) = x(x - 1)(x - 2) \rightarrow$  Una posible solución.

b)  $P(x) = (x + 1)^2(x - 3) \rightarrow$  Una posible solución.

c)  $P(x) = x^2(x - 5) \rightarrow$  Una posible solución.

**23.** Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:

- a) De cuarto grado sin raíces.                      b) Que tenga dos raíces dobles, 2 y -2.  
c) De tercer grado con una sola raíz.              d) De cuarto grado y con tres raíces.

- a)  $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \rightarrow$  Una posible solución.  
b)  $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2 \rightarrow$  Una posible solución.  
c)  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1) \rightarrow$  Una posible solución.  
d)  $P(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x - 3) \rightarrow$  Una posible solución.

**24.** Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:

- a)  $x^4 - 2x^2 + 1$                       b)  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$                       c)  $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$   
d)  $8x^3 + 6x^2 - 11x - 3$                       e)  $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$                       f)  $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

a)  $(x - 1)^2(x + 1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Raíces: 1 y -1 (dobles)

b)  $(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Raíces: 2, -3 y +3

c)  $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & & 0 \end{array}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Raíces: 1, -1, -2 y 3

d)  $(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(4x + 1)(2x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 8 & 6 & -11 & -3 \\ & & 8 & 14 & 3 \\ \hline & 8 & 14 & 3 & 0 \end{array}$$

$$8x^2 + 14x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} = \begin{cases} -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \\ -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Raíces: 1,  $-\frac{1}{4}$  y  $-\frac{3}{2}$

e)  $(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (x + 1)(3x - 1)(x + 2)$       f)  $(x - 2)(x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 8 & 3 & -2 \\ & & -3 & -5 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array} \quad \text{Raíces: } -1, \frac{1}{3} \text{ y } -2$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ -\frac{12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Raíces: 2

## Fracciones algebraicas

**25.**  Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a)  $\frac{x-4}{3x-12}$  y  $\frac{1}{3}$

b)  $\frac{x^2+x}{2x}$  y  $\frac{x}{2}$

c)  $\frac{x+y}{x^2-y^2}$  y  $\frac{1}{x-y}$


d)  $\frac{x}{x^2-x}$  y  $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque  $3(x-4) = 3x-12$ .

b) No son equivalentes, ya que  $2(x^2+x) \neq 2x^2$ .

c) Sí son equivalentes, porque  $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ .

d) Sí son equivalentes, porque  $(2x-2)x = 2x^2-2x$ .

**26.**  Descompón en factores y simplifica.

a)  $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b)  $\frac{x+2}{x^2-4}$

c)  $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d)  $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}$

e)  $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f)  $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a)  $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b)  $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c)  $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d)  $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)^2}$

e)  $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f)  $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

**27.**  Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a)  $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$

b)  $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$

c)  $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$

d)  $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$


a)  $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b)  $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c)  $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d)  $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$



**28.**  Simplifica las siguientes fracciones:

a)  $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x}$

b)  $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1}$

c)  $\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{2x^4 - 3x^3 + x^2}$

d)  $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^4 + x^3 - 6x^2}$

a)  $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{x(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{x-1}$

$$x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

b)  $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1} = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) \quad x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

1	1	0	-5	0	4
1	1	1	-4	-4	
-1	1	1	-4	-4	0
-1	-1	0	4		
1	0	-4	0		

$$x^4 - 4 = (x+2)(x-2)$$

c)  $\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{2x^4 - 3x^3 + x^2} = \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x^2(x-1)(2x-1)} = \frac{x+3}{2x-1}$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 + 2x - 3) = x^2(x-1)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(2x^2 - 3x + 1) = x^2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2(x-1)(2x-1)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d)  $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^4 + x^3 - 6x^2} = \frac{x(2x-3)(x-1)}{x^2(2x-3)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)}$


$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(2x^2 - 5x + 3) = x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = x(2x-3)(x-1)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(2x^2 + x - 6) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) = x^2(2x-3)(x+2)$$

$$2x^2 + x - 6 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}$$

Página 51

29.  Reduce a común denominador y opera.

a)  $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b)  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c)  $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

d)  $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

e)  $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$

f)  $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a)  $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{4x} - \frac{1}{4x} + \frac{4}{4x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

mín.c.m.  $(2x, 4x, x) = 4x$

b)  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x^2} - \frac{x}{3x^2} + \frac{3x}{3x^2} = \frac{3-x+3x}{3x^2} = \frac{3+2x}{3x^2}$

mín.c.m.  $(x^2, 3x, x) = 3x^2$

c)  $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2}{2x} + \frac{6}{2x} - \frac{2x}{2x} = \frac{x^2-2x+6}{2x}$

mín.c.m.  $(2, x, 1) = 2x$

d)  $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x(x+1)}{3x^2} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x^2+x}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2} = \frac{-x^2-x+6}{3x^2}$


mín.c.m.  $(x^2, 3x) = 3x^2$

e)  $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(x-3)} - \frac{3x-9}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$

mín.c.m.  $(x-3, x) = x(x-3)$

f)  $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{x^2-9}{(x+1)(x+3)} - \frac{x^2+x}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2-9-x^2-x}{(x+1)(x+3)} = \frac{-x-9}{(x+1)(x+3)}$

mín.c.m.  $[(x+1), (x+3)] = (x+1)(x+3)$

30.  Reduce a común denominador y opera.

a)  $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9}$

b)  $\frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{3}{x^2-4}$

c)  $\frac{1}{2x+2} + \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2}$

a)  $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} =$

$= \frac{x^2-4x+3-2x-6+x}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-5x-3}{(x+3)(x-3)}$

$\left. \begin{array}{l} (x+3) \\ (x-3) \\ x^2-9=(x+3)(x-3) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = (x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{3}{x^2-4} &= \frac{2x(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \frac{3x}{x(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{2x^2+4x-x^2-3x-2-3x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x-2}{x(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-2) \\ x^2-2x = x(x-2) \\ x^2-4 = (x+2)(x-2) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = x(x+2)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{2x+2} + \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2} &= \frac{(x-2)}{2(x+1)(x-2)} + \frac{2(3x-3)}{2(x+1)(x-2)} - \frac{2x(x+1)}{2(x+1)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2+6x-6-2x^2-2x}{2(x+1)(x-2)} = \frac{-2x^2+5x-8}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+2 = 2(x+1) \\ x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \\ (x-2) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = 2(x+1)(x-2)$$

**31.**  Efectúa.

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} &= \\ &= \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \frac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-2)(x^2-1) + (x+2)(x^2+x) - x^2}{x^2(x^2-1)} = \\ &= \frac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3+x+2}{x^4-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6} &= \\ &= \frac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \frac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \frac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \\ &= \frac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} &= \\ &= \frac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \frac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \frac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} = \\ &= \frac{(2x^2+4x)(2x-1) - 4x + (x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} = \\ &= \frac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)} = \frac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)} \end{aligned}$$

**32.**  Efectúa.

a)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}$       b)  $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3$       c)  $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3}$

a)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-1} =$   
 $= \frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1} = \frac{x^2+4x}{x^2-1}$

b)  $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3 = \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2} =$   
 $= \frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{7x-6}{(x-1)^2}$

c)  $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} =$   
 $= \frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{-2x^2-x}{x^2-9}$

**33.**  Opera, y simplifica si es posible.


a)  $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$       b)  $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$       c)  $\left(1 - \frac{2}{2-x}\right) \cdot \frac{2-x}{x^2}$       d)  $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$

a)  $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b)  $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

c)  $\left(1 - \frac{2}{2-x}\right) \left(\frac{2-x}{x^2}\right) = \left(\frac{2-x}{2-x} - \frac{2}{2-x}\right) \cdot \frac{2-x}{x^2} = \frac{-x}{2-x} \cdot \frac{2-x}{x^2} = \frac{-x(2-x)}{(2-x)x^2} = -\frac{1}{x}$

d)  $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right) = \frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1}\right) = \frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$

**34.**  Opera y simplifica.

a)  $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)$       b)  $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x}$


c)  $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$       d)  $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right)$

a)  $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9-x^2}{3x} : \frac{3+x}{3x} = \frac{9-x^2}{3x} = \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3-x$

b)  $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c)  $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left(\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x}\right) \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}$

d)  $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$

**35.**  Opera y simplifica.

a)  $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1$

b)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2}$

c)  $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d)  $\left(1 + \frac{y}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{y}\right)$

e)  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3x-4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{6-2x}$

a)  $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 = \left(\frac{x-x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 = \frac{x^2}{x(x+3)} - 1 =$   
 $= \frac{x^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2 - x^2 - 3x}{x(x+3)} = \frac{-3x}{x(x+3)} = \frac{-3}{x+3}$


b)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2} = \frac{x+3-x}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{x}{x+3}$

c)  $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 4 - \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2} = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$

d)  $\left(1 + \frac{y}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{y}\right) = \frac{x+y}{x} : \frac{y+x}{y} = \frac{(x+y)y}{(x+y)x} = \frac{y}{x}$

e)  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3x-4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{6-2x} = \left(\frac{2+x-3x+4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{2(3-x)} =$   
 $= \frac{6-2x}{2x} \cdot \frac{6x}{2(3-x)} = \frac{2(3-x)}{2x} \cdot \frac{6x}{2(3-x)} = \frac{2(3-x)6x}{2x \cdot 2(3-x)} = 3$

## Aplica lo aprendido

**36.**  Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:

a)  $x^2$ ;  $x^2 - x$ ;  $x^2 - 1$

b)  $x - 3$ ;  $x^2 - 9$ ;  $x^2 - 6x + 9$

c)  $x + 2$ ;  $3x + 6$ ;  $x^2 + x - 2$

d)  $2x$ ;  $2x + 1$ ;  $4x^2 - 1$

a)  $\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1) \end{array}$

b)  $\left. \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3 \\ \text{mín.c.m. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x - 3)^2(x + 3) \end{array}$

c)  $\left. \begin{array}{l} x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x + 2) \\ x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = x + 2 \\ \text{mín.c.m. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = 3(x + 2)(x - 1) \end{array}$

d)  $\left. \begin{array}{l} 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1) \end{array}$

**37.**  Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:

a)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$

b)  $\frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{\dots}$

c)  $\frac{x}{x - 3} = \frac{\dots}{x^2 - 9}$

d)  $\frac{2}{x + 2} = \frac{\dots}{x^2 + 4x + 4}$

a)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1}$

b)  $\frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{x(2x + 1)}$

c)  $\frac{x}{x - 3} = \frac{x(x + 3)}{x^2 - 9}$


d)  $\frac{2}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{x^2 + 4x + 4}$

**38.**  Halla el valor de  $m$  para que el polinomio  $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$  sea divisible por  $x + 2$ .

Llamamos  $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ . Dicho polinomio ha de ser divisible por  $x + 2$ , luego el resto ha de ser 0:

$$P(-2) = 0 \rightarrow m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \rightarrow m = 22$$

**39.**  Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que el polinomio  $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$  sea divisible por  $x - 1$  y por  $x + 2$ .

Como  $P(x)$  es divisible por  $x - 1$ ,  $P(1) = 0 \rightarrow 2 + 7 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -9$

Como  $P(x)$  es divisible por  $x + 2$ ,  $P(-2) = 0 \rightarrow 2 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow -16 + 28 - 2a + b = 0 \rightarrow -2a + b = -12$


Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = -9 \\ -2a + b = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + \cancel{b} = -9 \\ 2a - \cancel{b} = 12 \end{cases}$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad \quad \quad \underline{\quad\quad\quad}$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1$$

$$1 + b = -9 \rightarrow b = -10$$

**40.**  Halla el valor de  $m$  y  $n$  para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - mx^2 + nx + 4$$

sea divisible por  $x - 2$  y  $x + 2$ .

¿Cuáles son las raíces de  $P(x)$ ?

Para que  $P(x)$  sea divisible por  $x - 2$ , ha de ser  $P(2) = 0$ .

Para que  $P(x)$  sea divisible por  $x + 2$ , ha de ser  $P(-2) = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} P(2) &= 2^3 - m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 4 && \rightarrow 12 - 4m + 2n = 0 \\ P(-2) &= (-2)^3 - m(-2)^2 + n(-2) + 4 && \rightarrow -4 - 4m - 2n = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad \quad \quad \underline{\quad\quad\quad}$$

$$8 - 8m = 0 \rightarrow m = 1$$

$$12 - 4 + 2n = 0 \rightarrow 8 + 2n = 0 \rightarrow n = -4$$

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$$

Las raíces de  $P(x)$  son  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$  y  $x_3 = 1$ .

41.  El resto de la siguiente división es igual a  $-8$ :


$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale  $k$ ?

Llamamos  $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$ .

El resto de la división  $P(x) : (x - 2)$  es  $P(2)$ , luego:

$$\begin{aligned} P(2) = -8 &\rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow \\ &\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4 \end{aligned}$$

42.  Halla el valor que deben tener  $a$  y  $b$  para que al dividir el polinomio  $P(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + b$  entre  $(x - 1)$  el resto sea  $14$ , y al dividir el mismo polinomio entre  $(x + 3)$  el resto sea  $-2$ .

$$P(1) = 14 = 3 + a - 5 + b, \text{ luego } a + b = 16$$

$$\begin{aligned} P(-3) = -2 &= 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + b \\ -2 &= -81 + 9a + 15 + b, \text{ luego } 9a + b = 64 \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 9a + b = 64 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -a - \cancel{b} = -16 \\ 9a + \cancel{b} = 64 \\ \hline 8a = 48 \rightarrow a = 6 \end{array}$$

$$6 + b = 16 \rightarrow b = 10$$

**Página 52**

**43.** Si  $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$ , halla los valores  $P(8,75)$ ,  $P(10,25)$  y  $P(-7)$  con ayuda de la calculadora.

Describe la secuencia de teclas utilizadas como en la página 39.

$$8,75 \text{ (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{703.82} \rightarrow P(8,75) = 703,82\dots$$

$$10,25 \text{ (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{1489.7347\dots} \rightarrow P(10,25) = 1489,73\dots$$

$$7 \text{ (+/-) (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{-756} \rightarrow P(-7) = -756$$

**44.** Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a)  $P(x) = x^4 - 4x^2$  y  $Q(x) = x^2 - 2x$

b)  $P(x) = x^2 - 10x + 25$  y  $Q(x) = x^2 - 5x$

c)  $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$  y  $Q(x) = x - 3$

a)  $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x-2)(x+2) \\ Q(x) = x(x-2) \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

b)  $\left. \begin{array}{l} P(x) = (x-5)^2 \\ Q(x) = x(x-5) \end{array} \right\} \text{ No hay relación de divisibilidad.}$

c)  $\left. \begin{array}{l} P(x) = x(x-3)(x+4) \\ Q(x) = x-3 \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

**45.** Sacar factor común en cada expresión:

a)  $(x+2)(x-3) + 2x(x+2)$

b)  $(x-2)(2x+3) - (5-x)(x-2)$

c)  $(x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1)$

d)  $(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$

a)  $(x+2)[(x-3) + 2x] = (x+2)(3x-3) = 3(x+2)(x-1)$

b)  $(x-2)[(2x+3) - (5-x)] = (x-2)(3x-2)$

c)  $(2x-1)[(x+5) + (x-5)] = (2x-1)(2x)$

d)  $(3-y)[(a+b) - (a-b)] = (3-y)(2b)$

**46.** Factoriza las siguientes expresiones:

a)  $ax - ay + bx - by$

c)  $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

a)  $ax - ay + bx - by$

$a(x-y) + b(x-y)$

$(a+b)(x-y)$

c)  $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

$3xy(x+y) + y(x+y)$

$(3xy+y)(x+y)$

b)  $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

d)  $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

b)  $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

$2x^2(y+1) + (y+1)$

$(2x^2+1)(y+1)$

d)  $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

$2b^2(ab+1) - (ab+1)$

$(2b^2-1)(ab+1)$



47. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

c)  $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax}$

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

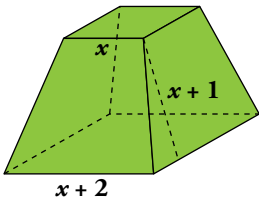
b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

c)  $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax} = \frac{2a^2b(2b - x)}{2b(a + 4x) - x(a + 4x)} = \frac{2a^2b(2b - x)}{(2b - x)(a + 4x)} = \frac{2a^2b}{a + 4x}$

## Resuelve problemas

48. Expresa, en función de  $x$ , el área total de este tronco de pirámide:

$x + 1$  es la altura de una cara lateral.



$$\text{Área lateral} = 4 \left[ \frac{(x + 2 + x)}{2} \cdot (x + 1) \right] = 4(x + 1)^2$$

$$\text{Área de las bases} = x^2 + (x + 2)^2$$

$$\text{Área total} = 4(x + 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$$

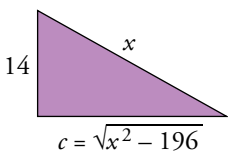
49. Un grifo tarda  $x$  minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de  $x$  la parte del depósito que se llena abriendo los dos durante un minuto.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3}$$

50. Se mezclan  $x$  kg de pintura de 5 €/kg con  $y$  kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de  $x$  e  $y$ .

$$\frac{5x + 3y}{x + y}$$

51. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa  $x$ .



$$\text{Perímetro: } P = 14 + x + \sqrt{x^2 - 196}$$

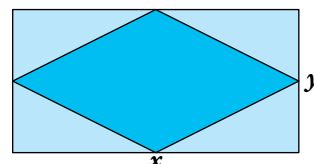
$$\text{Área: } A = \frac{14\sqrt{x^2 - 196}}{2} = 7\sqrt{x^2 - 196}$$


$$\text{Pitágoras: } x^2 = 14^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{x^2 - 196}$$

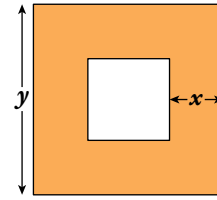
52. En un rectángulo de lados  $x$  e  $y$  inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.

$$\text{El lado del rombo es } l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Perímetro} = 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$




53.  Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando  $x$  e  $y$ .




$$\text{Área cuadrado grande} = y^2$$

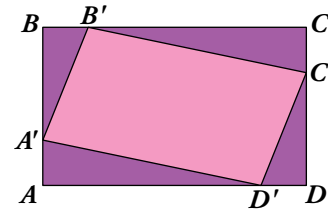
$$\text{Área cuadrado pequeño} = (y - 2x)^2$$

$$\text{Área parte coloreada} = y^2 - (y - 2x)^2 = 4xy - 4x^2$$

54.  Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad  $v$ . Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad  $v + 3$ . Expresa en función de  $v$  el tiempo que tardan en encontrarse.

$$t = \frac{60}{2v + 3}$$

55.  En el rectángulo  $ABCD$  de lados  $\overline{AB} = 3$  cm y  $\overline{BC} = 5$  cm, hemos inscrito el cuadrilátero  $A'B'C'D'$  haciendo  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$ . Escribe el área de  $A'B'C'D'$  en función de  $x$ .



Sabiendo que  $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$  y  $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$ , se tendrá:

$$\text{El área del triángulo } B'CC' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$


$$\text{El área del triángulo } A'AD' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } B'BA' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

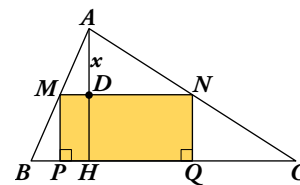
$$\text{El área del triángulo } D'DC' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

$$\text{El área del rectángulo } ABCD \text{ es } 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{\text{PARALELOGRAMO}} &= 15 - \left[ 2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2} \right] = 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = \\ &= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

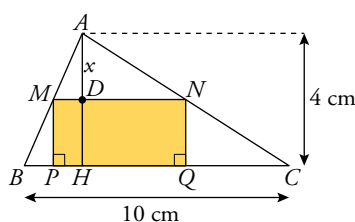
56.  En el triángulo de la figura conocemos  $\overline{BC} = 10$  cm y  $\overline{AH} = 4$  cm.

Por un punto  $D$  de la altura, tal que  $\overline{AD} = x$ , se traza una paralela  $MN$  a  $BC$ . Desde  $M$  y  $N$  se trazan perpendiculares a  $BC$ .



- a) Expresa  $\overline{MN}$  en función de  $x$ . (Utiliza la semejanza de los triángulos  $AMN$  y  $ABC$ ).

- b) Escribe el área del rectángulo  $MNPQ$  mediante un polinomio en  $x$ .




- a) Por la semejanza de triángulos:

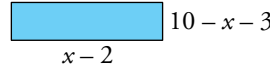
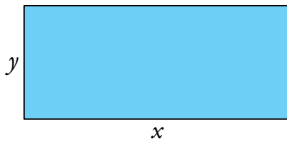
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

b)  $\overline{MP} = 4 - x \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \frac{5}{2}x(4 - x) = 10x - \frac{5}{2}x^2$

Página 53

57.  Tenemos un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si la base disminuye en 2 cm y la altura en 3 cm, ¿cuánto disminuye el área del rectángulo? Exprésalo en función de la base.




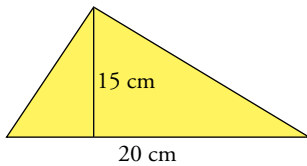
$$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$$

$$\text{Área}_2 = (x - 2)(7 - x)$$

$$\text{Área}_1 = x(10 - x)$$

$$\text{Diferencia de las áreas: } x(10 - x) - (x - 2)(7 - x) = 10x - x^2 - 7x + x^2 + 14 - 2x = x + 14$$


58.  La base de un triángulo mide 20 cm, y la altura, 15 cm. Si la altura aumenta un  $x\%$  y la base un  $(x + 2)\%$ , expresa el área del nuevo triángulo en función de  $x$ .



$$20 \text{ cm} \rightarrow 20 + \frac{x + 2}{100} \cdot 20 = 20 + \frac{x + 2}{5} = \frac{x + 102}{5}$$

$$15 \text{ cm} \rightarrow 15 + \frac{x}{100} \cdot 15 = 15 + \frac{3x}{20} = \frac{300 + 3x}{20}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x + 102}{5} \cdot \frac{300 + 3x}{20} \right)$$


59.  Un comerciante vendió dos bicicletas. En una ganó un 20% y en la otra perdió el 10% sobre el precio de compra en ambos casos. En total obtuvo una ganancia de un 15% sobre lo que le costaron. Expresa algebraicamente este enunciado.

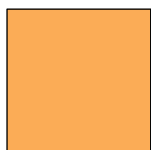
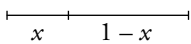
La primera bicicleta le cuesta  $x$ , la vende por  $1,2x$   $\left( +20\% = 1 + \frac{20}{100} = 1,2 \right)$ .

La segunda bicicleta le cuesta  $y$ , la vende por  $0,9y$   $\left( -10\% = 1 - \frac{10}{100} = 0,9 \right)$ .

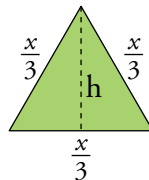
Las dos bicicletas juntas le cuestan  $(x + y)$  y las vende por  $1,15 \cdot (x + y)$ .

Por tanto:  $1,2x + 0,9y = 1,15(x + y) \rightarrow 0,05x = 0,25y \rightarrow x = 5y$

60.  Dividimos un alambre de 1 m de longitud en dos partes desiguales. Con una de ellas formamos un triángulo equilátero, y con la otra, un cuadrado. Escribe la suma de las áreas de ambas figuras.




$$A_C = \left( \frac{1 - x}{4} \right)^2$$

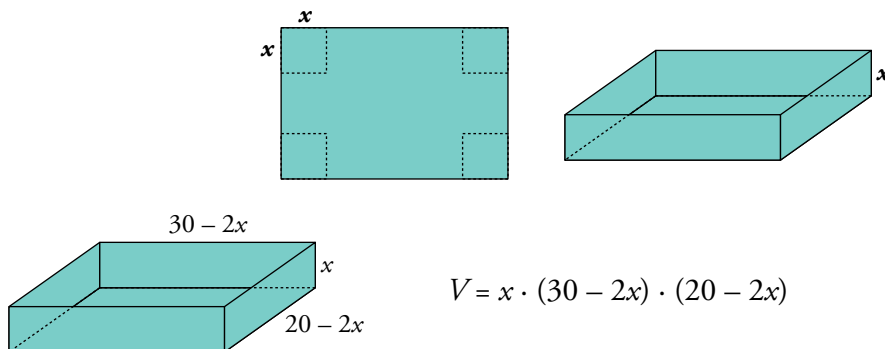


$$h = \sqrt{\left( \frac{x}{3} \right)^2 - \left( \frac{x}{6} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$


$$\text{Suma de las áreas} = \left( \frac{1 - x}{4} \right)^2 + \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

61.  De una cartulina rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 20 cm, recortamos un cuadrado de lado  $x$  en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de  $x$ .



$$V = x \cdot (30 - 2x) \cdot (20 - 2x)$$

## Reflexiona sobre la teoría

62.  En una división:

Dividendo =  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2$

Cociente =  $C(x) = x^2 - 5x - 1$


Resto =  $R(x) = 8x - 1$

¿Cuál es el divisor?

Como debe verificarse que  $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$ , donde  $D(x)$  es el divisor:

$$P(x) - R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2 - 8x + 1 = x^4 - 5x^3 - 5x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 \quad - 5x - 1 \quad \Big| \quad x^2 - 5x - 1 \\ -x^4 + 5x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 5x - 1 \\ -x^2 + 5x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \rightarrow \text{Luego: } D(x) = x^2 + 1$$

63.  ¿Cuál debe ser el valor de  $a$  y de  $b$  para que los polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$  sean iguales?

$P(x) = x^3 - (4 + a)x + (1 + b)$

$Q(x) = (a + 3)x^3 + (a + 2)x^2 - 2x + 5$

Igualamos coeficiente a coeficiente:

$$\left. \begin{array}{l} a + 3 = 1 \\ a + 2 = 0 \\ 4 + a = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a = -2 \qquad 1 + b = 5 \rightarrow b = 4$$


64.  Las raíces de  $P(x)$  son 0, 2 y -3.

a) Escribe tres divisores de  $P(x)$  de primer grado.


b) Escribe un divisor de  $P(x)$  de segundo grado.

a)  $x$ ;  $x - 2$ ;  $x + 3$

b) Por ejemplo:  $x(x - 2)$

- 65.**  a) Si la división  $P(x) : (x - 2)$  es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor  $P(2)$ ?  
 b) Si  $-5$  es una raíz del polinomio  $P(x)$ , ¿qué puedes afirmar de la división  $P(x) : (x + 5)$ ?  
 c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?


- a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego  $P(2) = 0$ .  
 b) La división  $P(x) : (x + 5)$  es exacta, el resto es 0.  
 c) En el teorema del resto.

- 66.**  Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:

a) mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$

b) máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = 2x + 1$

- a) Por ejemplo:  $P(x) = x^2$ ;  $Q(x) = (x - 3)(x + 2)$   
 b) Por ejemplo:  $P(x) = x(2x + 1)$ ;  $Q(x) = (2x + 1)(x - 2)$

- 67.**  Tenemos un polinomio  $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ . Busca un polinomio de segundo grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) máx.c.d.  $[P(x), Q(x)] = x - 1$

b) mín.c.m.  $[P(x), Q(x)] = (x - 1)^2(x^2 - 9)$


$Q(x) = (x - 1)(x - 3)$

- 68.**  ¿Por qué fracción hay que multiplicar a  $\frac{x - 5}{x - 1}$  para obtener  $\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3x - 4}$ ?

Habrás que multiplicar por  $\frac{x}{x + 4}$  ya que:


$$\frac{x^2 - 5x}{-x^2 + 5x} \left| \frac{x - 5}{x} \right. \quad \text{y} \quad \frac{x^2 + 3x - 4}{-x^2 + x} \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right.$$

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{4x - 4}{-4x + 4} \qquad \frac{0}{0}$$

- 69.**  Prueba que el polinomio  $x^2 + (a + b)x + ab$  es divisible por  $x + a$  y por  $x + b$  para cualquier valor de  $a$  y  $b$ . ¿Cuál será su descomposición factorial?

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a + b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & a + b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & 0 \end{array}$$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

**70.**  ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

- a) Si un polinomio es de grado 3, y otro, de grado 2, su producto es de grado 6.
- b) Si  $P(0) = 1$ , entonces  $P(x)$  es divisible por  $(x - 1)$ .
- c) Si sumamos dos polinomios de grado 3, siempre obtenemos un polinomio de grado 3.
- d) Si  $P(3) \neq 0$ , entonces el polinomio  $P(x)$  no es divisible por  $x - 3$ .
- e) Si  $P(-2) = 0$ , entonces  $x + 2$  es un factor de  $P(x)$ .
- f) Si  $P(x) = ax^2 + bx + 2$  y  $P(\pm 2) \neq 0$ , entonces  $P(x)$  no puede tener raíces enteras.
- g) No es posible escribir un polinomio de cuarto grado que solo tenga una raíz triple.
- h) El resultado de operar y simplificar la expresión siguiente es un número:

$$\left(\frac{2x + y}{x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x + 2y}$$

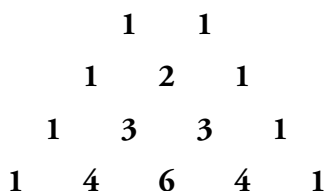
- a) Falso. Su grado será 5. Por ejemplo:  $x^3 \cdot (x^2 + 2) = x^5 + 2x^3$
- b) Falso. Por ejemplo:  $P(x) = x^2 + 1$ ,  $P(0) = 1$ , pero no es divisible por  $(x - 1)$
- c) Falso. Por ejemplo:  $P(x) = x^3 + 1$ ;  $Q(x) = -x^3 + x^2 - 3$   
 $P(x) + Q(x) = x^2 - 2$ , que tiene grado 2.
- d) Verdadero.
- e) Verdadero.
- f) Falso. Si  $a = -1 = b$ , por ejemplo, tenemos  $-x^2 - x + 2$ , que tiene raíz en  $x = 1$ .
- g) Verdadero.
- h) Verdadero.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x + y}{x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x + 2y} = \left(\frac{2xy + y^2 - x^2 - y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y^2 - x^2}{xy}\right) + \frac{2y}{x + 2y} = \\ & = \frac{(2xy - x^2) \cdot xy}{xy(4y^2 - x^2)} + \frac{2y}{x + 2y} = \frac{2xy - x^2}{(x + 2y)(2y - x)} + \frac{2y}{x + 2y} = \frac{2xy - x^2 + 4y^2 - 2xy}{(2y + x)(2y - x)} = \\ & = \frac{4y^2 - x^2}{(2y + x)(2y - x)} = \frac{(2y + x)(2y - x)}{(2y + x)(2y - x)} = 1 \end{aligned}$$

## Busca regularidades y generaliza

### Triángulos y potencias

Observa, comprueba y compara:



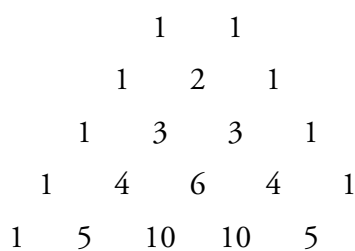
$$\begin{aligned}
 (a + b)^1 &= 1a + 1b \\
 (a + b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a + b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
 \end{aligned}$$



- ¿Sabrías añadir una fila más a este triángulo numérico?

(Se conoce como triángulo de Tartaglia).

- ¿Sabrías escribir el desarrollo polinómico de  $(a + b)^5$  sin necesidad de multiplicar el binomio  $(a + b)$  por sí mismo cinco veces?

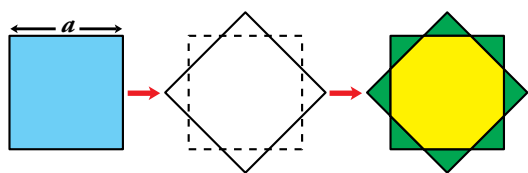


$$\rightarrow (a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

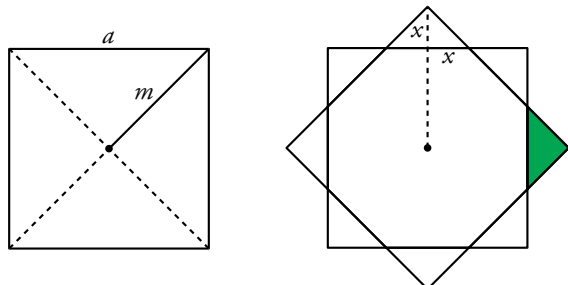
## Utiliza el lenguaje algebraico

### Cuadrado y octógono

Suponiendo conocida la longitud,  $a$ , del lado del cuadrado azul:



- Calcula el área del octógono amarillo.
- Calcula, también, el área de la estrella.



$$\begin{aligned}
 m^2 + m^2 &= a^2 \rightarrow m = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 x &= m - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Área del triángulo sombreado} \rightarrow A_T = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\text{Área del cuadrado} \rightarrow A_C = a^2$$

$$\text{Área del octógono} \rightarrow A_O = A_C - 4A_T = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Área de la estrella} \rightarrow A_E = A_C + 4A_T = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(2 - \sqrt{2})$$

## Reflexiona y exprésate

### ¡Curioso!

Piensa tres dígitos que no sean los tres iguales  $\longrightarrow$  Por ejemplo, 5, 8 y 3.

Forma con ellos el mayor número .....  $\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} \longrightarrow$  El número mayor ..... 853

Forma el menor .....  $\boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} \longrightarrow$  El número menor ..... 358

Réstalos .....  $\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} - \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} \longrightarrow$  La diferencia .....  $853 - 358 = 495$

- Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11.
- Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que la observación anterior es cierta para cualquier trío de cifras,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , siendo distintas al menos dos de ellas.

 Ayuda:

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} = 100x + 10y + z$$

$$\boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = 100z + 10y + x$$

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} - \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.



## Entrena resolviendo problemas

- En cada operación, sustituye cada letra por una cifra distinta de cero.

$$\begin{array}{r}
 yz \\
 yz \\
 yz \\
 yz \\
 + yz \\
 \hline
 xyz
 \end{array}$$

Atendiendo a la columna de las unidades, vemos que el valor  $5z$  termina en 0 o en 5.

Como  $z \neq 0 \rightarrow z = 5$  y “nos llevamos 2”.

Atendiendo a la columna de las decenas,  $5y + 2$  termina en  $y$ . Esa condición solo se cumple para  $y = 2$  e  $y = 7$ .

Si  $y = 2$ ,  $5y + 2 = 12$ . Sería  $x = 1$ . Si  $y = 7$ , y  $5y + 2 = 37$ . Sería  $x = 3$ .

Concluimos que hay dos soluciones:  $x = 1, y = 2, z = 5$  y  $x = 3, y = 7, z = 5$ .

$$\begin{array}{r}
 ab \\
 \times c \\
 \hline
 de \\
 + fg \\
 \hline
 hi
 \end{array}$$

Por tanteo, se llega a la solución:

$$a = 1, b = 7, c = 4, d = 6, e = 8, f = 2, g = 5, h = 9, i = 3$$

- Resuelve estos problemas sin utilizar el álgebra:

a) Un estanque se alimenta de dos bocas de agua. Abriendo solamente la primera, el estanque se llena en 8 horas y, abriendo ambas, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solo la segunda boca?

b) En una balsa hay un grifo y un sumidero. El sumidero vacía la balsa en 2 horas.

Un día, sin darnos cuenta, y estando la balsa llena, abrimos el sumidero pero dejamos el grifo abierto. La balsa tardó 5 horas en vaciarse.

¿Cuánto tarda el grifo en llenar la balsa?

a) La primera boca llena el estanque en 8 horas. Por tanto, cada hora llena  $\frac{1}{8}$  de estanque.

Las dos bocas juntas llenan el estanque en 3 horas. Por tanto, cada hora llenan  $\frac{1}{3}$  de estanque.

La segunda boca llenará, cada hora,  $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$  de estanque.

Si en una hora la segunda boca llena  $\frac{5}{24}$  de estanque, en llenarlo tardará:

$$\frac{24}{5} \text{ horas} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

b) El sumidero vacía la balsa en 2 horas  $\rightarrow$  En una hora vacía  $\frac{1}{2}$  de balsa.

La balsa se vacía, con sumidero y grifo abiertos, en 5 horas  $\rightarrow$  Cada hora se vacía  $\frac{1}{5}$  de balsa.

El grifo llena, cada hora,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$  de balsa.

El grifo tarda en llenar la balsa  $\frac{10}{3}$  horas = 3 h +  $\frac{1}{3}$  de hora = 3 h 20 min.

## Autoevaluación

**1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.**

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24 \left[ \frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12} \right] =$$

$$= 8(x^2 - x - 2) - 3(9x^2 - 6x + 1) + 2(4x^2 - 9) =$$

$$= 8x^2 - 8x - 16 - 27x^2 + 18x - 3 + 8x^2 - 18 = -11x^2 + 10x - 37$$

**2. Halla el cociente y el resto de esta división:**

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \phantom{- 1} \\ - 3x^4 \phantom{- 5x^3} - 6x^2 \\ \hline - 5x^3 - 2x^2 \phantom{- 1} \\ \phantom{- 5x^3} + 10x \phantom{- 1} \\ \phantom{- 5x^3} - 2x^2 + 10x \phantom{- 1} \\ \phantom{- 5x^3} \phantom{- 2x^2} + 4 \\ \hline 10x + 3 \end{array}$$

COCIENTE:  $3x^2 - 5x - 2$

RESTO:  $10x + 3$

**3. El polinomio  $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$  es divisible por  $x - a$  para dos valores enteros de  $a$ . Búscalos y da el cociente en ambos casos.**

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisible por  $x + 4$ .

COCIENTE:  $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 6 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Es divisible por  $x - 6$ .

COCIENTE:  $x^3 + 4x^2 + x + 4$

**4. Calcula el valor del parámetro  $m$  para que el polinomio  $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$  sea divisible por  $x + 1$ .**

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 7 & -m & 3 & -2 \\ & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline & 7 & -7-m & 10+m & -12-m \end{array}$$

$$-12 - m = 0 \rightarrow m = -12$$

**5. Descompón en factores los siguientes polinomios:**

a)  $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

b)  $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

a)  $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x^2 - 12x + 36)$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x - 6)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & & 2 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

**6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

**7. Efectúa, y simplifica si es posible.**

a)  $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2}$

b)  $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2}$

c)  $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a^3 - a}$

a)  $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \frac{x^4}{4}$

b)  $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \frac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c)  $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \frac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{2}{a^2 - 1}$

**8. Halla  $a$  y  $b$  para que al dividir  $x^3 + ax^2 + bx - 4$  entre  $x + 1$  el resto sea  $-10$ , y al dividirlo entre  $x - 2$  el resto sea  $2$ .**

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

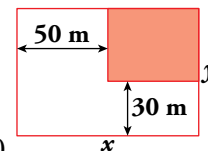
$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \rightarrow 2a - 2b = -10 \\ 4a + 2b = -2 \rightarrow 4a + 2b = -2 \\ \hline 6a = -12 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

**9. En una parcela de lados  $x$  e  $y$  se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.**



Expresa, en función de  $x$  e  $y$ , el área de la zona no edificada.

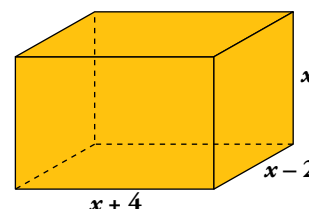
$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1500 = 50y + 30x - 1500$

$A = (30x + 50y - 1500) \text{ m}^2$

**10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:**

Volumen:  $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área:  $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$



## Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24 \left[ \frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12} \right] =$$

$$= 8(x^2 - x - 2) - 3(9x^2 - 6x + 1) + 2(4x^2 - 9) =$$

$$= 8x^2 - 8x - 16 - 27x^2 + 18x - 3 + 8x^2 - 18 = -11x^2 + 10x - 37$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \\ -3x^4 \phantom{- 5x^3} - 6x^2 \\ \hline -5x^3 - 2x^2 \\ \phantom{-5x^3} + 10x \\ \hline -2x^2 + 10x \\ \phantom{-2x^2} + 4 \\ \hline 10x + 3 \end{array}$$

COCIENTE:  $3x^2 - 5x - 2$

RESTO:  $10x + 3$

3. El polinomio  $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$  es divisible por  $x - a$  para dos valores enteros de  $a$ . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisible por  $x + 4$ .

COCIENTE:  $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 6 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Es divisible por  $x - 6$ .

COCIENTE:  $x^3 + 4x^2 + x + 4$

4. Calcula el valor del parámetro  $m$  para que el polinomio  $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$  sea divisible por  $x + 1$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 7 & -m & 3 & -2 \\ & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline & 7 & -7-m & 10+m & -12-m \end{array}$$

$$-12 - m = 0 \rightarrow m = -12$$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a)  $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

b)  $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

a)  $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x^2 - 12x + 36)$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x - 6)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & & 2 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

**6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a)  $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

b)  $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

**7. Efectúa, y simplifica si es posible.**

a)  $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2}$

b)  $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2}$

c)  $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a^3 - a}$

a)  $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \frac{x^4}{4}$

b)  $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \frac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c)  $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \frac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{2}{a^2 - 1}$

**8. Halla  $a$  y  $b$  para que al dividir  $x^3 + ax^2 + bx - 4$  entre  $x + 1$  el resto sea  $-10$ , y al dividirlo entre  $x - 2$  el resto sea  $2$ .**

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

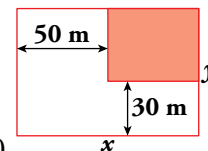
$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \rightarrow 2a - 2b = -10 \\ 4a + 2b = -2 \quad 4a + 2b = -2 \\ \hline 6a = -12 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

**9. En una parcela de lados  $x$  e  $y$  se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.**



Expresa, en función de  $x$  e  $y$ , el área de la zona no edificada.

$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1500 = 50y + 30x - 1500$

$A = (30x + 50y - 1500) \text{ m}^2$

**10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:**

Volumen:  $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área:  $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$

