

1 Fórmulas trigonométricas

Página 131

1 Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

2 Demuestra II.3 a partir de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\operatorname{tg} \alpha + (-\operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha (-\operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$(*) \text{ Como } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3 Demuestra la fórmula II.3 a partir de las siguientes:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $\cos \alpha \cos \beta$.

4 Si $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$, halla $\cos 12^\circ$, $\operatorname{tg} 12^\circ$, $\cos 37^\circ$ y $\operatorname{tg} 37^\circ$. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25° , usando las fórmulas (I) y (II).

• $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$

$$\cos 12^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 12^\circ} = \sqrt{1 - 0,04} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 12^\circ = \frac{0,2}{0,98} = 0,2$$

• $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$

$$\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

• $49^\circ = 12^\circ + 37^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = \operatorname{sen}(12^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 12^\circ \cos 37^\circ + \cos 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\cos 49^\circ = \cos(12^\circ + 37^\circ) = \cos 12^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 37^\circ} = \frac{0,2 + 0,75}{1 - 0,2 \cdot 0,75} = 1,12$$

(Podría calcularse $\operatorname{tg} 49^\circ = \frac{\operatorname{sen} 49^\circ}{\cos 49^\circ}$).

• $25^\circ = 37^\circ - 12^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 25^\circ = \operatorname{sen} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,6 \cdot 0,98 - 0,8 \cdot 0,2 = 0,428$$

$$\operatorname{cos} 25^\circ = \operatorname{cos} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{cos} 37^\circ \cos 12^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,8 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,904$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{tg} (37^\circ - 12^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ}{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ} = \frac{0,75 - 0,2}{1 + 0,75 \cdot 0,2} = 0,478$$

5 Demuestra esta igualdad:

$$\frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} &= \frac{\operatorname{cos} a \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b - \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b} = \\ &= \frac{2 \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b} = \frac{\operatorname{cos} a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

6 Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

7 Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 30^\circ) = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 30^\circ) = \operatorname{cos}^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45° .

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 45^\circ) = \operatorname{cos}^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 45^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existe.}$$

9 Demuestra que: $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{cos} \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$$

Página 132

Hazlo tú. Halla $\operatorname{cos} 15^\circ$ y $\operatorname{tg} 15^\circ$.

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 30^\circ}{1 + \operatorname{cos} 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

- $\cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

Por la igualdad fundamental:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades ($2.^a - 1.^a$):

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

- Por último:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

11 Sabiendo que $\cos 78^\circ = 0,2$, calcula $\operatorname{sen} 78^\circ$ y $\operatorname{tg} 78^\circ$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $\cos 78^\circ = 0,2$

$$\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

- $\operatorname{sen} 39^\circ = \operatorname{sen} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $\cos 60^\circ = 0,5$.

- $\cos 60^\circ = 0,5$

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = 0,5$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 60^\circ}{2}} = 0,866$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}} = 0,577$$

13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $\cos 90^\circ = 0$.

- $\cos 90^\circ = 0$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 90^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 90^\circ}{1 + \cos 90^\circ}} = \sqrt{1} = 1$$

14 Demuestra esta igualdad: $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

15 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Página 133

16 Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β :

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots \qquad \cos(\alpha - \beta) = \dots$$

- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array} \right\}$$

- $$\begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{array}$$

$$\text{Sumando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

$$\text{Restando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (2)$$

- Llamando $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

$$(1) \rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \qquad (2) \rightarrow \cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

17 Transforma en producto y calcula.

- a) $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$ b) $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

$$\text{a) } \operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{c) } \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

18 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}}{2 \cos \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} 3a}{2 \cos 3a} = \operatorname{tg} 3a$$

Ecuaciones trigonométricas

Página 134

Hazlo tú. Resuelve $\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$.

$$\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$$

$$\text{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \text{sen} 30^\circ = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \text{sen} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos \alpha$:

$$\frac{1}{2} \text{tg} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow \text{tg} \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow \text{tg} \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \alpha_1 = 66^\circ 12' 22'' \\ \alpha_2 = 246^\circ 12' 22'' \end{cases}$$

Hazlo tú. Resuelve $\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$.

$$\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha - 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (1 - 2 \text{sen} \alpha) = 0$$

$$\text{Posibles soluciones: } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ \\ 1 - 2 \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 150^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 135

Hazlo tú. Resuelve $\text{sen} 3\alpha - \text{sen} \alpha = 0$.

$$\text{sen} 3\alpha - \text{sen} \alpha = 0$$

$$2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \text{sen} \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2\alpha \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \cos 2\alpha \text{sen} \alpha = 0$$

$$\text{Si } \cos 2\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ \\ 2\alpha = 270^\circ \rightarrow \alpha_2 = 135^\circ \\ 2\alpha = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ \rightarrow \alpha_3 = 225^\circ \\ 2\alpha = 270^\circ + 360^\circ = 630^\circ \rightarrow \alpha_4 = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$$

1 Resuelve.

a) $\text{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

b) $\text{sen} \alpha = \cos \alpha$

c) $\text{sen}^2 \alpha = 1$

d) $\text{sen} \alpha = \text{tg} \alpha$

a) $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ o bien $x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) Si } \text{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } \text{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O bien } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k \pi \text{ rad} \\ \text{O bien } \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow x = 2k \pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = k \pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$

b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$

d) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3$

$$a) \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

$$b) 2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = -45^\circ = 315^\circ, \alpha_4 = 225^\circ$

Todas las soluciones son válidas.

$$c) \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_3 = 45^\circ, \alpha_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas.

$$d) 2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \xrightarrow{(*)} 2(1 - \cos^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 3$$

(*) Como $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$2 - 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Entonces:

• Si $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$

• Si $\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = -60^\circ = 300^\circ$

Las tres soluciones son válidas.

3 Transforma en producto $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0$.

$$\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{5\alpha + 3\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{8\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = 0 \\ \operatorname{sen} \alpha = 0 \end{cases}$$

• Si $\cos 4\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 90^\circ & \rightarrow \alpha_1 = 22^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ & \rightarrow \alpha_2 = 67^\circ 30' \\ 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_3 = 112^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_4 = 157^\circ 30' \end{cases}$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 Resuelve.

a) $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1$

b) $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0$

c) $\sqrt{2} \cos(\alpha/2) - \cos \alpha = 1$

d) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0$

a) $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 4(\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 8 \cos^2 \alpha - 4 + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0,625 \rightarrow \alpha_1 = 51^\circ 19' 4,13''$, $\alpha_2 = -51^\circ 19' 4,13''$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210^\circ$, $\alpha_4 = 330^\circ = -30^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90^\circ = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} - \cos \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (\cos \alpha + 1) = 0$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90^\circ$ y $\alpha_3 = 180^\circ$

d) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$

• Si $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$, $\alpha_4 = 150^\circ$, $\alpha_5 = 210^\circ$, $\alpha_6 = 330^\circ$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{cos}(270^\circ - \alpha) + \text{cos} 180^\circ$

b) $\text{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0$

a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{cos}(270^\circ - \alpha) + \text{cos} 180^\circ$

$$\text{sen} 180^\circ \text{cos} \alpha - \text{cos} 180^\circ \text{sen} \alpha = \text{cos} 270^\circ \text{cos} \alpha + \text{sen} 270^\circ \text{sen} \alpha - 1$$

$$\text{sen} \alpha = -\text{sen} \alpha - 1 \rightarrow 2 \text{sen} \alpha = -1 \rightarrow \text{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210^\circ, \alpha_2 = 330^\circ$$

b) $\text{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0$

$$\text{sen} 45^\circ \text{cos} \alpha - \text{cos} 45^\circ \text{sen} \alpha + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \text{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen} \alpha + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0$$

$$\text{cos} \alpha - \text{sen} \alpha + 2 \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \text{cos} \alpha + \text{sen} \alpha = 0$$

Dividimos entre $\text{cos} \alpha$:

$$1 + \text{tg} \alpha = 0 \rightarrow \text{tg} \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135^\circ, \alpha_2 = 315^\circ$$

3 Funciones trigonométricas

Página 137

1 ¿Verdadero o falso?

- a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.
 b) Un radián es un ángulo algo menor que 60° .
 c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.
 d) 180° es algo menos de 3 radianes.
 e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.
- a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.
 b) Verdadero, porque un radián tiene $57^\circ 17' 45''$.
 c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud r .
 d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a π radianes, algo más de 3 radianes.
 e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

2 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

- a) 30° b) 72° c) 90°
 d) 127° e) 200° f) 300°

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

- a) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$ b) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$
 c) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$ d) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 127^\circ \approx 2,22 \text{ rad}$
 e) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$ f) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$

3 Pasa a grados los siguientes ángulos:

- a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad
 d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad f) π rad

- a) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 2 = 114^\circ 35' 29,6''$
 b) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 0,83 = 47^\circ 33' 19,8''$
 c) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36^\circ$
 d) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$
 e) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 3,5 = 200^\circ 32' 6,8''$
 f) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \pi = 180^\circ$

4 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 138 del libro de texto.

Página 138

5 ¿Verdadero o falso?

- a) Las funciones trigonométricas son periódicas.
- b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de 2π .
- c) La función *tg x* tiene periodo π .
- d) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \\ \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x \end{array} \right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

Podemos observarlo en la gráfica de la función *tg x* en la página 138 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 138 del libro de texto.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 139

1. Razones trigonométricas a partir de otras

Hazlo tú. Sabiendo que $\operatorname{sen} 54^\circ = 0,81$ halla $\operatorname{cos} 108^\circ$, $\operatorname{tg} 27^\circ$, $\operatorname{sen} 24^\circ$, $\operatorname{cos} 99^\circ$.

$$\operatorname{sen}^2 54^\circ + \operatorname{cos}^2 54^\circ = 1 \rightarrow 0,81^2 + \operatorname{cos}^2 54^\circ = 1 \rightarrow \operatorname{cos} 54^\circ = \sqrt{1 - 0,81^2} = 0,59$$

$$\operatorname{cos} 108^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 54^\circ) = \operatorname{cos}^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = 0,59^2 - 0,81^2 = -0,31$$

$$\operatorname{tg} 27^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{54^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 54^\circ}{1 + \operatorname{cos} 54^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,59}{1 + 0,59}} = 0,51$$

$$\operatorname{sen} 24^\circ = \operatorname{sen} (54^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{cos} 30^\circ - \operatorname{cos} 54^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 0,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,59 \cdot \frac{1}{2} = 0,41$$

$$\operatorname{cos} 99^\circ = \operatorname{cos} (54^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 54^\circ \operatorname{cos} 45^\circ - \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 0,59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,16$$

2. Identidades trigonométricas

Hazlo tú. Demuestra que $\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble y las relaciones fundamentales:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (2 \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

3. Simplificación de expresiones trigonométricas

Hazlo tú. Simplifica la expresión $\frac{2 \operatorname{cos} (45^\circ + \alpha) \operatorname{cos} (45^\circ - \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha}$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{cos} (45^\circ + \alpha) \operatorname{cos} (45^\circ - \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} &= \frac{2 (\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha} = 1 \end{aligned}$$

Página 140

4. Resolución de ecuaciones trigonométricas

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$

b) $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2$

c) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

d) $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x} = 1$

a) Extraemos factor común: $\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

b) Pasamos $\cos x$ al segundo miembro y elevamos al cuadrado después:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} \operatorname{sen} x)^2 &= (2 - \cos x)^2 \rightarrow 3\operatorname{sen}^2 x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 3(1 - \cos^2 x) = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

Comprobamos las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow \text{Vale.}$$

$$x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow \text{No vale.}$$

c) Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2 &= 1 - \cos x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x \rightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (1 - \cos x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{aligned}$$

d) Transformamos las sumas en productos:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos \frac{4x + 2x}{2} \cos \frac{4x - 2x}{2}}{2 \cos \frac{4x + 2x}{2} \operatorname{sen} \frac{4x - 2x}{2}} &= 1 \rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 141

1. Razones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$; $(\alpha - \beta)$; 2α y $\alpha/2$

Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, y $\operatorname{cos} \beta = -\frac{1}{4}$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$, hallar: $\operatorname{cos}(\alpha + \beta)$; $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$; $\operatorname{tg} 2\alpha$; $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{4}{5} \text{ porque el ángulo está en el segundo cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{15}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ porque el ángulo está en el tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{15} + 4}{20}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{-4\sqrt{15} - 3}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \beta}{1 + \operatorname{cos} \beta}} = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = -\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ya que el ángulo } \frac{\beta}{2} \text{ está en el segundo cuadrante.}$$

2. Identidades trigonométricas

Demostrar que: $\operatorname{cos} 3x = 4 \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} 3x &= \operatorname{cos}(2x + x) = \operatorname{cos} 2x \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = (\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x = \\ &= \operatorname{cos}^3 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x \end{aligned}$$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

Escribir la expresión $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta)$ en función de $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{cos}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar esta expresión: $2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \left(\pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}} \right)^2 - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

5. Ecuaciones trigonométricas

Resolver estas ecuaciones:

a) $\cos^2(2x + 30^\circ) = \frac{1}{4}$ b) $4 \operatorname{sen} x + 4 \cos^2 x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 0$, con $\operatorname{tg} x \neq 0$

a) $\cos(2x + 30^\circ) = \pm \frac{1}{2}$

$$\text{Si } \cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 60^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 195^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos(2x + 30^\circ) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 120^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ \rightarrow x = 105^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 120^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 285^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

b) Si $\operatorname{tg} x = 0$ entonces $x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$; $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $\operatorname{tg} x \neq 0$, dividimos entre esta función en los dos términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 &\rightarrow \frac{4 \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

6. Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$:

$$\begin{cases} \cos y - \operatorname{sen} x = 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \cos y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos y = 1 + \operatorname{sen} x$$

$$4 \operatorname{sen} x (1 + \operatorname{sen} x) + 1 = 0 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, que es imposible.

• Si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} ; \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} ; \begin{cases} x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} ; \begin{cases} x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 142

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

1 Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula sin hallar el valor de α :

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$

b) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

c) $\operatorname{sen} (\alpha + 30^\circ)$

d) $\cos (60^\circ - \alpha)$

e) $\cos \frac{\alpha}{2}$

f) $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{9}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ ya que el ángulo está en el } 2.^\circ \text{ cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

b) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{7}$ ya que $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.º cuadrante).

c) $\operatorname{sen} (\alpha + 30^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21} - 3}{8}$

d) $\cos (60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{\sqrt{21} + 3}{8}$

e) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ porque $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.º cuadrante).

f) $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$

2 Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ a partir de las de 45° .

$$\operatorname{sen} (22^\circ 30') = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos (22^\circ 30') = \cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} (22^\circ 30') = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

3 Si $\cos 78^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115° .

$$41^\circ = 78^\circ - 37^\circ$$

- $\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$

- $\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $\operatorname{sen} 41^\circ = \operatorname{sen} (78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ - \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $\operatorname{cos} 41^\circ = \operatorname{cos} (78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $\operatorname{tg} 41^\circ = \frac{\operatorname{sen} 41^\circ}{\operatorname{cos} 41^\circ} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $\operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen} (78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ + \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $\operatorname{cos} 115^\circ = \operatorname{cos} (78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $\operatorname{tg} 115^\circ = \frac{\operatorname{sen} 115^\circ}{\operatorname{cos} 115^\circ} = -\frac{0,904}{0,428} = -2,112$

4 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45° .

b) Utilizando los resultados del apartado anterior, calcula las razones trigonométricas de: 105° ; 165° ; 15° ; 195° y 135° .

$$\text{a) } \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos} (30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 75^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 105^\circ = \operatorname{cos} (30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ + \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 165^\circ = \operatorname{cos} (90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{cos} 90^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ - \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos} (90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{cos} 90^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 195^\circ = \operatorname{sen} (270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos 75^\circ - \cos 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 195^\circ = \operatorname{cos} (270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{cos} 270^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 195^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 180^\circ \cos 45^\circ - \cos 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = \cos 180^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

5 Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α , y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen} (45^\circ + \alpha) - \cos (\alpha - 45^\circ)$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

c) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha + \cos 2\alpha$

d) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$

a) $\operatorname{sen} (45^\circ + \alpha) - \cos (\alpha - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \operatorname{sen} \alpha - (\cos \alpha \cos 45^\circ + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 45^\circ) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$

c) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha + \cos 2\alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha =$
 $= 2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)$

d) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \left(\pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha =$
 $= \frac{1+\cos \alpha}{2} \cdot \frac{1-\cos \alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \frac{1-\cos^2 \alpha}{4} + \frac{\cos^2 \alpha}{4} = \frac{1}{4}$

6 Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{-7}{25}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ ($180^\circ < \beta < 270^\circ$), calcula $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Usamos la relación $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para calcular $\operatorname{sen} \alpha$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{24}{25} \text{ porque el ángulo está en el 3.º cuadrante.}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ porque también pertenece al tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Como $360^\circ < \alpha + \beta < 540^\circ$, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180^\circ < \frac{\alpha + \beta}{2} < 270^\circ$.

Por tanto, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha + \beta}{2}$ es positiva.

$$\text{Calculamos } \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Por tanto, } \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos (\alpha + \beta)}{1 + \cos (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - (-3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$$

7 Si $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270^\circ$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \operatorname{cos} \alpha = 9 + 9 \operatorname{cos} \alpha \rightarrow 10 \operatorname{cos} \alpha = -8 \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

8 Si $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90^\circ$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \operatorname{cos} \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 - \sqrt{7}}{3} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{3}{7 - \sqrt{7}} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - 1}{2(7 - \sqrt{7})}}$$

9 Expresa en función de α y simplifica esta expresión:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} (90 - \alpha)$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2} - \frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2} + 2(\operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 90^\circ \operatorname{sen} \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha + 2 \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

10 Transforma las siguientes sumas en productos:

a) $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ$

b) $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ$

c) $\operatorname{cos} 48^\circ + \operatorname{cos} 32^\circ$

d) $\operatorname{cos} 48^\circ - \operatorname{cos} 32^\circ$

e) $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{cos} 75^\circ$

a) $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{cos} 15^\circ$

b) $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 50^\circ \operatorname{sen} 15^\circ$

c) $\operatorname{cos} 48^\circ + \operatorname{cos} 32^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 40^\circ \operatorname{cos} 8^\circ$

d) $\operatorname{cos} 48^\circ - \operatorname{cos} 32^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 8^\circ$

e) $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{30^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{cos} (-10^\circ) = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{cos} 10^\circ$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ + \operatorname{cos} 75^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{45^\circ + 75^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{45^\circ - 75^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 60^\circ \operatorname{cos} (-15^\circ) = 2 \operatorname{cos} 60^\circ \operatorname{cos} 15^\circ$

■ Identidades trigonométricas

11 Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha$
 c) $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$ d) $\frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot 1 = \operatorname{sen} \alpha$

c) $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

d) $\frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) =$
 $= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha =$
 $= 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

12 Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:

a) $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$ b) $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

a) $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - (\cos x \cos 120^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ) =$
 $= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cos 120^\circ + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ =$
 $= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cdot (-\cos 60^\circ) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ =$
 $= 2 \cos x \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x = \cos x$

b) $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} =$
 $= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - (-1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

13 Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:

a) $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta$ b) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

* En b), divide numerador y denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$.

a) $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) =$
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta =$
 $= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos \beta = \cos \beta$

b) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

14 Demuestra.

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$ b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$

b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

15 Demuestra.

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) =$
 $= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta =$
 $= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

16 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$

b) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

c) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

d) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

e) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

a) $\frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} =$
 $= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$

b) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

c) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$
 $= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha =$
 $= \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin \alpha$

d) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

e) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

(*) $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \rightarrow -\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1$

17 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.

a) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \sin \frac{130^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \sin 90^\circ \cos 40^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 143

Ecuaciones trigonométricas

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$ b) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$ c) $1 - 4 \operatorname{cos}^2 x = 0$ d) $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0$

a) $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot k$

b) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

• Si $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k$

c) $1 - 4 \operatorname{cos}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{cos}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{cos} x = \pm \frac{1}{2}$

• Si $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k$

d) $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k; x = 306^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k$

19 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

c) $2 \operatorname{cos}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{cos} x = 0$

a) $2 \operatorname{cos}^2 x - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + 1}_{\operatorname{cos}^2 x} = 0 \left. \vphantom{2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0} \right\} \rightarrow 2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^2 x = 0$

$\operatorname{cos}^2 = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

b) $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_3 = 90^\circ \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

O, de otra forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k\pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

$$c) \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

20 Resuelve.

a) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$ c) $2 \cos^2 x + \text{sen} x = 1$ d) $3 \text{tg}^2 x - \sqrt{3} \text{tg} x = 0$

$$a) (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - 2 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow 1 - 2 \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Si $\text{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45^\circ, x_2 = 135^\circ$

• Si $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = 225^\circ, x_4 = 315^\circ$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210^\circ, x_3 = 330^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \operatorname{tg} x (3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 210^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas. Entonces:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180^\circ = k\pi \text{ y } x_2 = 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0$

c) $\operatorname{cos} 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

d) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cos} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{cos} 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} \right) + \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + \operatorname{cos} \left(-\frac{4\pi}{3} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{cos} x (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 &= 0 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!, pues } |\operatorname{sen} x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x &= 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x &= 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

22 Resuelve.

a) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$

c) $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

d) $4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1+\cos x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} &= 0 \rightarrow 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + 1 &= \cos x \rightarrow 1-\cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\
 &\rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible, pues } |\cos x| \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Luego: $x = k \cdot 360^\circ = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 2 \cdot \frac{1-\cos x}{2} + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x &= 0 \rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 300^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 4(1-\cos^2 x)\cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 &= 0 \rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos^4 x + 2\cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \begin{cases} x_1 = 0^\circ \\ x_2 = 180^\circ \end{cases} \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_3 = 45^\circ, x_4 = 315^\circ \\ x_5 = 135^\circ, x_6 = 225^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

23 Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $\operatorname{tg} x$ y resuélvelas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $\cos x$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

• Si $\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

24 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi) = 2$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} x \right) + \cos x \cos \pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 2 = \cos x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = \cos^2 x \rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2 \text{ No vale.}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2 \text{ Vale.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 &\rightarrow -\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos x$:

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 1 &\rightarrow 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \\ \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2} \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \\ \rightarrow -2 \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 + \cos x \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x &\rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

- Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| a) $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$ | b) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$ |
| c) $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ | d) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$ |
| e) $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$ | f) $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$ |
| g) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$ | |

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ 1/2 \rightarrow x_2 = 30^\circ, x_3 = 150^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ, & x_2 = 210^\circ \\ x_3 = 150^\circ, & x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, & x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \begin{cases} \approx -1,366 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\cos x| \leq 1 \\ \approx 0,366 \rightarrow x_3 = 68^\circ 31' 51,1'', & x_4 = 291^\circ 28' 8,9'' \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 68^\circ 31' 51,5'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_4 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 68^\circ 31' 51,1'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_3 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, & x_2 = 180^\circ \\ 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_3 = 0^\circ = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240^\circ, & x_5 = 120^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_4 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ x_5 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sqrt{3} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} + \cos x - 1 &= 0 \rightarrow \frac{3-3\cos x}{2} = (1-\cos x)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 3-3\cos x = 2(1+\cos^2 x - 2\cos x) \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 120^\circ, x_3 = 240^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Al comprobar, vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x &= 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} &\rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ \\ x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x &= 1 \rightarrow \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg} x \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 3) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = 3 \rightarrow x_3 = 71^\circ 33' 54,2'', x_4 = 251^\circ 33' 54,2'' \end{cases} \end{aligned}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \\ x_4 &= 251^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{7\pi}{5} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 180^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

■ Ángulos en radianes

26 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 3,2$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ$$

$$\frac{4\pi}{9} \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{9} = 80^\circ$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$1,5 \text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

$$3,2 \text{ rad} = \frac{3,2 \cdot 180^\circ}{\pi} = 183^\circ 20' 47''$$

27 Pasa a radianes los siguientes ángulos. Exprésalos en función de π :

$$135^\circ; 210^\circ; 108^\circ; 72^\circ; 126^\circ; 480^\circ$$

$$135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$108^\circ = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$$

$$72^\circ = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

$$126^\circ = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10} \text{ rad}$$

$$480^\circ = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad}$$

28 Prueba que:

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

29 Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$

c) $\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

30 Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) 0,8 rad

b) 3,2 rad

c) 2 rad

d) 4,5 rad

e) $\pi/8$ rad

f) $7\pi/4$ rad

g) $3\pi/5$ rad

h) $1,2\pi$ rad

* Ten en cuenta que: $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $\pi \approx 3,14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; $2\pi \approx 6,28$.

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 0,8 = 0,72$

$\cos 0,8 = 0,50$

$\operatorname{tg} 0,8 = 1,03 \rightarrow$ Cuadrante I

b) $\operatorname{sen} 3,2 = -0,06$

$\cos 3,2 = -1$

$\operatorname{tg} 3,2 = 0,06 \rightarrow$ Cuadrante III

c) $\operatorname{sen} 2 = 0,91$

$\cos 2 = -0,42$

$\operatorname{tg} 2 = -2,19 \rightarrow$ Cuadrante II

d) $\operatorname{sen} 4,5 = -0,98$

$\cos 4,5 = -0,21$

$\operatorname{tg} 4,5 = 4,64 \rightarrow$ Cuadrante III

e) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = 0,38$

$\cos \frac{\pi}{8} = 0,92$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41 \rightarrow$ Cuadrante I

f) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -0,71$

$\cos \frac{7\pi}{4} = 0,71$

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Cuadrante IV

g) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} = 0,95$

$\cos \frac{3\pi}{5} = -0,31$

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -3,08 \rightarrow$ Cuadrante II

h) $\operatorname{sen} 1,2\pi = -0,59$

$\cos 1,2\pi = -0,81$

$\operatorname{tg} 1,2\pi = 0,73 \rightarrow$ Cuadrante III

31 En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,32$

b) $\cos \alpha = 0,58$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$

d) $\operatorname{sen} \alpha = -0,63$

a) $\alpha_1 = 0,33$; $\alpha_2 = 2,82$

b) $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 5,33$

c) $\alpha_1 = -0,98$; $\alpha_2 = 2,16$

d) $\alpha_1 = -0,68$; $\alpha_2 = 3,82$

Para resolver

32 Representa las siguientes funciones trigonométricas:

a) $y = -\text{sen } x$

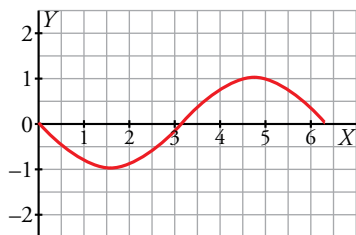
b) $y = 1 + \text{sen } x$

c) $y = -\text{cos } x$

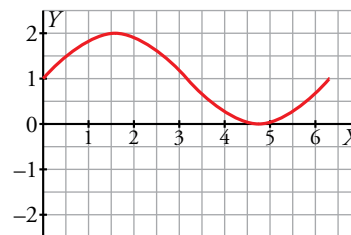
d) $y = 1 + \text{cos } x$

Todas estas funciones son periódicas, de período 2π . Están representadas en el intervalo $[0, 2\pi]$. A partir de aquí, se repite.

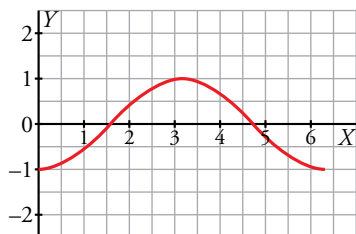
a) $y = -\text{sen } x$



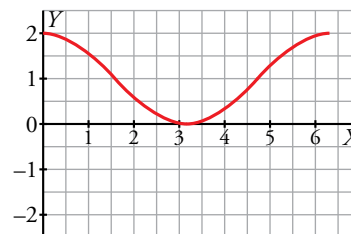
b) $y = 1 + \text{sen } x$



c) $y = -\text{cos } x$



d) $y = 1 + \text{cos } x$



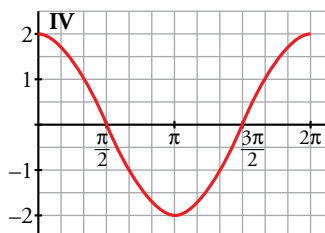
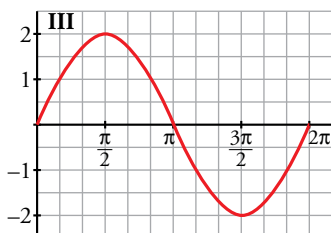
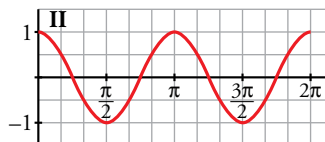
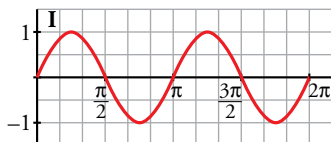
33 Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le corresponde:

a) $y = 2 \text{sen } x$

b) $y = \text{cos } 2x$

c) $y = 2 \text{cos } x$

d) $y = \text{sen } 2x$



a) Gráfica III.

b) Gráfica II.

c) Gráfica IV.

d) Gráfica I.

34 Halla los puntos de corte de las funciones $y = \text{sen } x$ e $y = \text{tg } x$.

Los puntos de corte serán aquellos cuyas abscisas cumplan $\text{sen } x = \text{tg } x$.

Resolvemos la ecuación:

$$\text{sen } x - \text{tg } x = 0 \rightarrow \text{sen } x - \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = 0 \rightarrow \text{sen } x \left(1 - \frac{1}{\text{cos } x}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{\text{cos } x} = 0 \end{cases}$$

• Si $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k; x = \pi + 2\pi \cdot k$

• Si $1 - \frac{1}{\text{cos } x} = 0 \rightarrow \text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k$

En resumen, $x = \pi \cdot k$

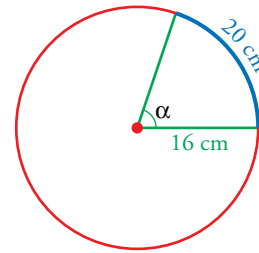
En todos ellos tanto el seno como la tangente valen 0. Por tanto, los puntos de corte de las funciones son de la forma $(\pi \cdot k, 0)$.

- 35** En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.

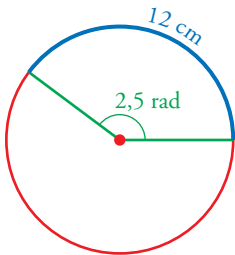
Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π rad, entonces:

$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,25 = 71^\circ 37' 11''$$



- 36** En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?



$$\frac{2,5 \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{12 \text{ cm}}{R \text{ cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8 \text{ cm}$$

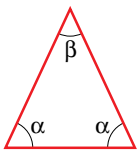
- 37** Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.

Como $\frac{19}{5} = 3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi < \alpha < 4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$ y $0 < \frac{9\pi}{5} \text{ rad} < 2\pi$.

- 38** Si en este triángulo isósceles sabemos que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sin hallar el ángulo α , el valor de $\cos \beta$.



Para calcular $\cos \beta$ necesitamos averiguar primero el valor de $\sin \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{8} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{8} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}} \text{ ya que es un ángulo agudo.}$$

$$\cos \beta = \cos (180^\circ - 2\alpha) = \cos 180^\circ \cos 2\alpha + \sin 180^\circ \sin 2\alpha = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\left(\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

- 39** En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45^\circ$ y $\cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$. Calcula, sin hallar los ángulos \hat{A} y \hat{C} , las razones trigonométricas del ángulo \hat{C} .

Calculamos primero las razones trigonométricas de \hat{A} y de \hat{B} .

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180^\circ.$$

$$\sin \hat{B} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \hat{C} = \sin (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \sin 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) - \cos 180^\circ \sin (\hat{A} + \hat{B}) = \sin (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= \sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{C} &= \cos (180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \cos 180^\circ \cos (\widehat{A} + \widehat{B}) + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} (\widehat{A} + \widehat{B}) = -\cos (\widehat{A} + \widehat{B}) = \\ &= -(\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \operatorname{sen} \widehat{A} \operatorname{sen} \widehat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

40 Si $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, sin hallar el ángulo α .

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} &\rightarrow \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \text{ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \text{ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.}$$

41 Demuestra estas igualdades:

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$ b) $\operatorname{sen} 4\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$ c) $\cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 4\alpha &= \operatorname{sen} (2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos (2 \cdot 2\alpha) + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$$

42 Simplifica:

a) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$ b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \frac{2 (\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 (\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (2\alpha) &= \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = -\operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

43 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

b) $\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

d) $\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$

a) $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 30^\circ \rightarrow x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150^\circ \rightarrow x_2 = 75^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390^\circ \rightarrow x_3 = 195^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510^\circ \rightarrow x_4 = 255^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b) $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 150^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{array} \right.$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

c) $2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 3x - \cos x \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x \rightarrow$ (Dividimos entre $2 \operatorname{sen} x$)

$\rightarrow \cos 2x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \rightarrow$

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 315^\circ \rightarrow x_1 = 157,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 135^\circ \rightarrow x_2 = 67,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 675^\circ \rightarrow x_3 = 337,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 495^\circ \rightarrow x_4 = 247,5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67,5^\circ + k \cdot 90^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

44 a) Demuestra que $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$. b) Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 3x - 2 \operatorname{sen} x = 0$.

a) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x =$
 $= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$

b) $\operatorname{sen} 3x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$$3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 3 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (4 \operatorname{sen}^2 x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ, x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k \pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5\pi}{6} + k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

45 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$ b) $\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \stackrel{(*)}{=} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] =$$

$$= \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] \cdot \left[-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{-\beta}{2} \right] = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - 1 + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(*) Por el apartado anterior.

46 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \text{sen } x - \text{sen } y = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$ c) $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 y = 1 \\ \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ 4 \text{sen } x \text{cos } y = 1 \end{cases}$

a) De la segunda ecuación: $2 \cos \frac{x+y}{2} \text{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$

Como:

$$x + y = 120^\circ \rightarrow 2 \cos 60^\circ \text{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ$$

Así: $x + y = 120^\circ$

$$\frac{x - y = 60^\circ}{2x = 180^\circ} \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ$$

Luego la solución es $(90^\circ, 30^\circ)$

b) $x + y = 90^\circ \rightarrow$ complementarios $\rightarrow \text{sen } x = \text{cos } y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\text{cos } y + \text{cos } y = 1 \rightarrow 2 \text{cos } y = 1 \rightarrow \text{cos } y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ \rightarrow x = 90^\circ - y = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Luego la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$

c) Como $\begin{cases} \text{cos}^2 y = 1 - \text{sen}^2 y \\ \text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}^2 x + 1 - \text{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 0 \\ -\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 0 \end{array}$$

$$-2 \text{sen}^2 y = 0 \rightarrow \text{sen } y = 0 \rightarrow y = 0^\circ$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\text{cos}^2 x - 0 = 1 \rightarrow \text{cos}^2 x = 1 = \begin{cases} \text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ \text{cos } x = -1 \rightarrow x = 180^\circ \in 2.^\circ \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: $(0^\circ, 0^\circ)$

d) $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ 4 \text{sen } x \text{cos } y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{cos } y = 1 - \text{sen } x$

$$4 \text{sen } x (1 - \text{sen } x) = 1 \rightarrow 4 \text{sen}^2 x - 4 \text{sen } x + 1 = 0 \rightarrow \text{sen } x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{cos } y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

47 Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

a) $\text{sen}(x - 60^\circ) = \text{sen } 2x$

b) $\text{cos}(x - 45^\circ) = \text{cos}(2x + 60^\circ)$

c) $\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

d) $\text{cos}(2x - 30^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

a) $\text{sen}(x - 60^\circ) = \text{sen } 2x \rightarrow \text{sen } 2x - \text{sen}(x - 60^\circ) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow 2 \text{cos} \frac{2x + x - 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x - (x - 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{cos} \frac{3x - 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0$

• Si $\text{cos} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 80^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x - 60^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 200^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución:

$\frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 320^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\text{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 60^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

b) $\text{cos}(x - 45^\circ) = \text{cos}(2x + 60^\circ) \rightarrow \text{cos}(2x + 60^\circ) - \text{cos}(x - 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \text{sen} \frac{2x + 60^\circ + x - 45^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x + 60^\circ - (x - 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0$

• Si $\text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\text{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 105^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

c) $\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

Como $\text{cos } x = \text{sen}(x + 90^\circ)$, podemos sustituir en el segundo miembro obteniendo:

$\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{sen}(x + 45^\circ + 90^\circ) \rightarrow \text{sen}(x + 60^\circ) = \text{sen}(x + 135^\circ) \rightarrow \text{sen}(x + 135^\circ) - \text{sen}(x + 60^\circ) = 0$

$-2 \text{cos} \frac{x + 135^\circ + x + 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 135^\circ - (x + 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{cos} \frac{2x + 195^\circ}{2} \text{sen} \frac{75^\circ}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{2x + 195^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 352^\circ 30' + 360^\circ \cdot k \\ \frac{2x + 195^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 172^\circ 30' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

d) $\text{cos}(2x - 30^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ) \rightarrow \text{cos}(2x - 30^\circ) - \text{cos}(x + 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \text{sen} \frac{2x - 30^\circ + x + 45^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x - 30^\circ - (x + 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0$

• Si $\text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\text{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x - 75^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

48 En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β . Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.

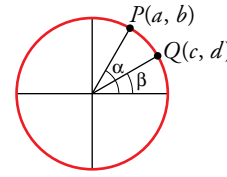
a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a $\text{sen } \gamma$?

- I. $ac + bd$ II. $bc - ad$ III. $ad - bc$ IV. $ab + cd$

b) ¿Alguna de ellas es igual a $\text{cos } \gamma$?

a) $\text{sen } \gamma = \text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = ad - bc$ (III)

b) $\text{cos } \gamma = \text{cos } (\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta = bd + ac$ (I)



Página 145

Cuestiones teóricas

49 ¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir x e y para que se verifique $\text{cos } (x + y) = 2 \text{cos } x \text{cos } y$?

- Ⓐ $x = y$ Ⓑ $x - y = \pi$ Ⓒ $x + y = \pi$ Ⓓ $x - y = \frac{\pi}{2}$

$\text{cos } (x + y) = \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y$

Si $\text{cos } (x + y) = 2 \text{cos } x \text{cos } y \rightarrow \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y = 2 \text{cos } x \text{cos } y \rightarrow -\text{sen } x \text{sen } y = \text{cos } x \text{cos } y$

Dividiendo entre $\text{cos } x \text{cos } y$ se obtiene que $\frac{-\text{sen } x \text{sen } y}{\text{cos } x \text{cos } y} = 1$, es decir, $-\text{tg } x \text{tg } y = 1$ y esto ocurre solo

cuando se cumple (IV) porque despejando y tenemos: $y = x + \frac{\pi}{2}$, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } y = \text{sen } \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \text{cos } x \\ \text{cos } y = \text{cos } \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen } x \end{array} \right\} \rightarrow \text{tg } y = \frac{\text{sen } y}{\text{cos } y} = \frac{\text{cos } x}{-\text{sen } x} = -\frac{1}{\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}} = -\frac{1}{\text{tg } x}$$

50 Expresa $\text{sen } 4\alpha$ y $\text{cos } 4\alpha$ en función de $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$.

$\text{sen } 4\alpha = \text{sen } (2 \cdot 2\alpha) = 2 \text{sen } 2\alpha \text{cos } \alpha = 2 \cdot 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = 4 \text{cos}^3 \alpha \text{sen } \alpha - 4 \text{cos } \alpha \text{sen}^3 \alpha$

$\text{cos } 4\alpha = \text{cos } (2 \cdot 2\alpha) = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 2\alpha = (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)^2 - (2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha)^2 =$

$= \text{cos}^4 \alpha - 2 \text{cos}^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^4 \alpha - 4 \text{sen}^2 \alpha \text{cos}^2 \alpha = \text{cos}^4 \alpha - 6 \text{cos}^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^4 \alpha$

51 Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica su seno? Prueba si se cumple $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x$ para cualquier valor de x .

La afirmación es falsa porque, por ejemplo, $\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3} \text{sen } 30^\circ \neq 2 \text{sen } 30^\circ$.

Veamos ahora si existe algún ángulo que cumpla la relación $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x$.

$2 \text{sen } x \text{cos } x = 2 \text{sen } x = \text{sen } x \text{cos } x - \text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x (\text{cos } x - 1) = 0$

- Si $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$, $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$
- Si $\text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$ (solución botenida anteriormente)

Por tanto, los únicos ángulos que cumplen la relación dada son de la forma $180^\circ \cdot k$.

52 Justifica que en un triángulo ABC , rectángulo en A , se verifica la siguiente igualdad:

$\text{sen } 2B = \text{sen } 2C$

Como el triángulo es rectángulo en \hat{A} , se tiene que $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$ y, por tanto,

$\text{sen } \hat{B} = \text{sen } (90^\circ - \hat{C}) = \text{cos } \hat{C}$ y $\text{cos } \hat{B} = \text{cos } (90^\circ - \hat{C}) = \text{sen } \hat{C}$

Luego, $\text{sen } 2\hat{B} = 2 \text{sen } \hat{B} \text{cos } \hat{B} = 2 \text{cos } \hat{C} \text{sen } \hat{C} = \text{sen } 2\hat{C}$

53 ¿Para qué valores de α y β se verifica la igualdad $\text{sen } (\alpha + \beta) = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$?

Como $\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$, $\text{sen } (\alpha + \beta) = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \rightarrow \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $\cos \alpha \cos \beta$ se tiene que $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = \operatorname{tg} x$.

Si $\cos \alpha = 0$ entonces $0 = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 0$ ya que $\operatorname{sen} \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90^\circ + 360^\circ \cdot k$ o $270^\circ + 360^\circ \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$.

54 ¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:

a) $y = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ d) $y = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = \cos x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de $\operatorname{sen} x$.

- a) Coincide con la gráfica de la función $y = \cos x$. b) Es la gráfica de la función $y = -\operatorname{sen} x$.
c) Coincide con la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$. d) Coincide con la gráfica de la función $y = \cos x$.

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

55 ¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:

a) $y = \cos \frac{x}{2}$ b) $y = \operatorname{sen} (x - \pi)$ c) $y = \cos (x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

$$\text{a) } \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases} \quad \text{b) } \operatorname{sen} (x - \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \cos (x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Para profundizar

56 Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se verifica: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} (360^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \frac{\operatorname{tg} 360^\circ - \operatorname{tg} (\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{tg} 360^\circ \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{-\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta [-\operatorname{tg} (\alpha + \beta)] = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (360^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

57 Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.

Si llamamos x a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180^\circ - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $\cos(180^\circ - 2x) = 2 \cos x$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} \cos 180^\circ \cos 2x + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 2x &= 2 \cos x \rightarrow -\cos 2x = 2 \cos x \rightarrow -\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos x \rightarrow \\ &\rightarrow -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow x = 68^\circ 31' 45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180^\circ - 2 \cdot 68^\circ 31' 45'' = 42^\circ 56' 30''$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

58 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

a) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3} \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 3/4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1/4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} - \cos x \\ \cos x \left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \cos x - \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x + 2 \cos^2 x = 1$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

$$\cos y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$$

• Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi \end{cases}$

Soluciones: $\left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3} \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x = \operatorname{sen} x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 x &= \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ y } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ vale.}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ no puede ser porque no está en el intervalo dado.}$$

• Si $\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$$

$$\text{Además, } \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ Valen.}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0, y = \pi$$

$$\text{Además, } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ Valen.}$$

d) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^2 y) = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 - \operatorname{sen}^2 x) \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow 16 \operatorname{sen}^2 x - 1 - 16 \operatorname{sen}^4 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 \operatorname{sen}^4 x - 16 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$x = 75^\circ, x = 105^\circ, y = 75^\circ, y = 285^\circ$$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$$(75^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$(75^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$x = 285^\circ, x = 255^\circ, y = 105^\circ, y = 255^\circ$$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$$(285^\circ, 105^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$(285^\circ, 255^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(255^\circ, 105^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(255^\circ, 255^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

59 Demuestra que:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{b) } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{c) } \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

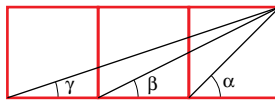
a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2 \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\cos x} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

60 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$:



Supongamos que los cuadrados tienen lado l .

Por una parte,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

Autoevaluación

Página 145

1 Si $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:

a) $\operatorname{sen} \alpha$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ porque $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

2 Demuestra cada una de estas igualdades:

a) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

a) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) =$
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta =$
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

3 Resuelve:

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - (-\operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x(-2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ, x = 150^\circ \end{cases}$

Soluciones:

$x_1 = 360^\circ \cdot k; x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k; x_3 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x_4 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

4 Simplifica:

a) $\frac{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ}$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)$

a) $\frac{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{60^\circ - 30^\circ}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{60^\circ - 30^\circ}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{cos} 45^\circ} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(\frac{2}{1 + \operatorname{cos} \alpha}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 2$

5 Expresa en grados: $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{2}$ rad, 2 rad.

$\frac{3\pi}{4}$ rad = 135°

$\frac{5\pi}{2}$ rad = 450°

2 rad = 114° 35' 30"

6 Expresa en radianes dando el resultado en función de π y como número decimal.

a) 60°

b) 225°

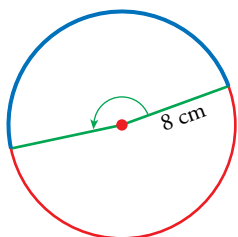
c) 330°

a) $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

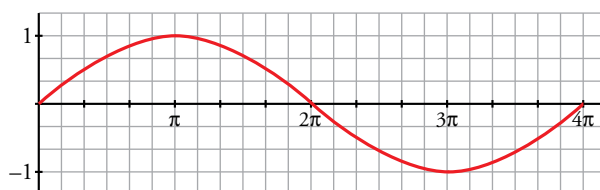
c) $330^\circ = \frac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

7 En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?



$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

8 Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:



a) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0$

$x = 3\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2} = \operatorname{sen} 2\pi = 0$