

## Resuelve

Página 171

### Descomposición de una fuerza

I. Una cuerda de 10 m de larga cuelga de dos escarpias, A y B, situadas a la misma altura y a 8 m de distancia entre sí. De ella se cuelga una pesa de 50 kg de masa que permanece en equilibrio en un punto situado a 3 m de A y a 7 m de B.

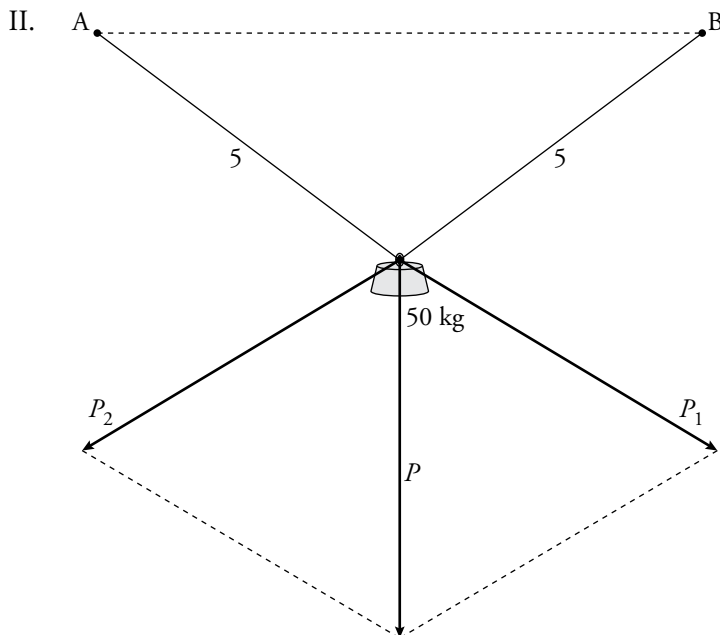
Observa que descomponemos el peso,  $P$ , que produce los 50 kg de masa, en dos componentes,  $P_1$  y  $P_2$ , cada una de las cuales tira de uno de los trozos de cuerda. Estima, midiendo y teniendo en cuenta la escala, la magnitud de cada una de las dos componentes del peso.

II. Repite la construcción suponiendo que la masa se coloca simétricamente respecto a las dos escarpias (5 m de cuerda a cada lado). Estima, midiendo, la tracción que, en este caso, debe soportar cada trozo de cuerda.

III. Vuelve a repetir la construcción para una cuerda de doble longitud y en la que se coloca la pesa simétricamente.

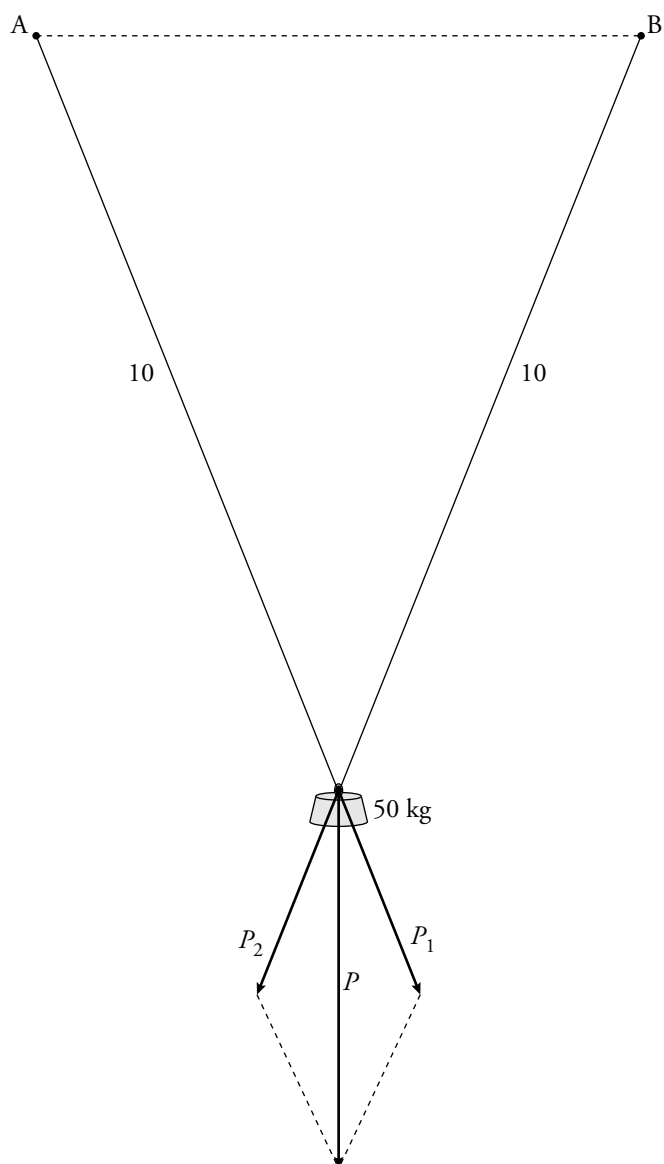
Si la cuerda fuera débil y temieras que pudiera romperse con tracciones fuertes, ¿cuál de las tres situaciones I, II o III te parecería la más adecuada para colgar la pesa?

- I.  $P = 50$  kg  
 $P_1 = 48$  kg  
 $P_2 = 27$  kg



Cada componente del peso es de unos 42 kg.

III.



Cada componente del peso es de unos 27 kg.

Conclusiones: Si la cuerda es débil, tenemos que colgar el peso en el centro y cuanto más larga sea la cuerda, mejor.

## 2 Coordenadas de un vector

### Página 175

1 Si  $\vec{u}(-2, 5)$  y  $\vec{v}(1, -4)$  son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a)  $2\vec{u} + \vec{v}$

b)  $\vec{u} - \vec{v}$

c)  $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

d)  $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a)  $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b)  $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c)  $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(-\frac{17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d)  $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$



**Página 178**

**6** Las coordenadas de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  respecto a una base ortonormal son  $\vec{u}(3, -4)$  y  $\vec{v}(-1, 3)$ . Halla:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  y  $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b)  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$  y  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de  $k$  para que  $(4, k)$  sea perpendicular a  $\vec{v}$ .

d) Un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$ .

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0,9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161^\circ 33' 54''$

c)  $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que  $(4, k)$  sea perpendicular a  $\vec{v}$ , ha de ser  $k = \frac{4}{3}$ .

d) Un vector perpendicular a  $\vec{u}(3, -4)$  es, por ejemplo,  $(4, 3)$ .

Un vector unitario paralelo a  $(4, 3)$  es  $\frac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a  $(3, -4)$ , son  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  y  $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ .

## Ejercicios y problemas resueltos

### Página 179

#### 1. Producto escalar en bases no ortonormales

**Hazlo tú.** Calcula el producto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , siendo  $\vec{a}(0, 3)$  y  $\vec{b}(-1, 1)$  sus coordenadas respecto a la base  $B$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$$

### Página 180

#### 4. Descomponer un vector

**Hazlo tú.** Resuelve este mismo problema si  $\vec{a} = (-1, 4)$  y  $\vec{b} = (2, 9)$ .

$$\begin{cases} \vec{u} = k\vec{a} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = k(-1, 4) = (-k, 4k) \\ \vec{v} = h(4, 1) = (4h, h) \\ (2, 9) = (-k, 4k) + (4h, h) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = -k + 4h \\ 9 = 4k + h \end{cases} \rightarrow k = 2, h = 1$$

Los vectores buscados son  $\vec{u} = (-2, 8)$  y  $\vec{v} = (4, 1)$ .

## Ejercicios y problemas guiados

Página 181

### 1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

Dado el vector  $\vec{v}(9, 12)$ , calcular las coordenadas de los siguientes vectores:

a)  $\vec{u}$ , unitario y de la misma dirección que el vector  $\vec{v}$ .

b)  $\vec{w}$ , ortogonal al vector  $\vec{v}$  y del mismo módulo.

c)  $\vec{z}$ , de módulo 5 y ortogonal a  $\vec{v}$ .

$$a) |\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9, 12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Otra solución: } \vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$b) \vec{w}_1 = (-12, 9)$$

$$\text{Otra solución: } \vec{w}_2 = (12, -9)$$

$$c) |\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

### 2. Cálculo de los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores

De los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  conocemos sus módulos, 1 y  $\sqrt{2}$ , respectivamente, y sabemos que forman un ángulo de  $45^\circ$ .

Hallar  $|\vec{a} + \vec{b}|$  y  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + 2 =$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + 2 =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$$

### 3. Determinación de parámetros para que un vector cumpla ciertas condiciones

Sean los vectores  $\vec{a}(3, n)$  y  $\vec{b}(-2, m)$ . Calcular el valor de los parámetros  $n$  y  $m$  en cada uno de los siguientes casos, para que se cumpla:

a)  $|\vec{a}| = 5$

b)  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

c)  $\vec{a}$  forme un ángulo de  $45^\circ$  con el vector  $\vec{u} = (1, 1)$ .

a)  $|\vec{a}| = \sqrt{9+n^2} = 5 \rightarrow 9+n^2 = 25 \rightarrow n = -4, n = 4$

b)  $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6+nm = 0 \\ \sqrt{9+n^2} = \sqrt{4+m^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6+nm = 0 \\ 9+n^2 = 4+m^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{n} \\ 9+n^2 = 4 + \left(\frac{6}{n}\right)^2 \end{cases}$

Soluciones:  $n = -2, m = -3; n = 2, m = 3$

c)  $\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| |\vec{v}| \cos 45^\circ = |\vec{a}| \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = |\vec{a}| = \sqrt{9+n^2}$

$\vec{a} \cdot \vec{v} = (3, n) \cdot (1, 1) = 3 + n$

Luego  $\sqrt{9+n^2} = 3 + n \rightarrow n = 0$

### 4. Coordenadas de un vector en una base no ortonormal

En una base ortonormal se consideran los vectores  $\vec{u}(3, 0)$ ,  $\vec{v}(2, 1)$  y  $\vec{w}(-1, -2)$ .

Comprobar que  $B(\vec{u}, \vec{v})$  es también una base y calcular las coordenadas de  $\vec{w}$  en esta base.

$\frac{3}{2} \neq \frac{0}{1}$ , luego no tienen la misma dirección. Por tanto, forman una base.

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \rightarrow (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \rightarrow (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

Igualando ambas coordenadas:  $\begin{cases} -1 = 3m + 2n \\ -2 = n \end{cases}$

Solución:  $m = 1, n = -2$



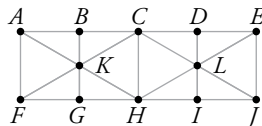
## Ejercicios y problemas propuestos

Página 182

### Para practicar

#### Los vectores y sus operaciones

1 Observa la siguiente figura:



a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores:

$$\vec{AB} \text{ e } \vec{IJ}; \vec{AH} \text{ y } \vec{LC}.$$

b) Calcula  $\vec{AC} + \vec{CH}$  y  $\vec{HC} + 2\vec{CL}$ .

c) Completa las siguientes igualdades:  $\vec{LC} - \vec{CB} = \vec{L...}$ ;  $\vec{HA} + \vec{H...} = \vec{HC}$

a)  $\vec{AB}$  e  $\vec{IJ}$  tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

$$\vec{AH} \text{ y } \vec{LC} \text{ tienen misma dirección, sentido contrario y } |\vec{AH}| = 2|\vec{LC}|.$$

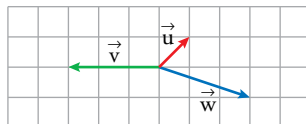
b)  $\vec{AC} + \vec{CH} = \vec{AH}$

$$\vec{HC} + 2\vec{CL} = \vec{HC} + \vec{CJ} = \vec{HJ}$$

c)  $\vec{LC} - \vec{CB} = \vec{LC} + \vec{CD} = \vec{LD}$

$$\vec{HA} + \vec{HJ} = \vec{HC}$$

2 Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  los siguientes vectores:



Calcula gráficamente los vectores:

a)  $\vec{u} + \vec{v}$

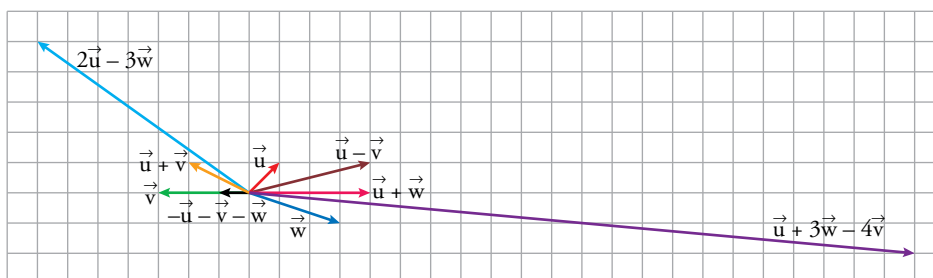
b)  $\vec{u} - \vec{v}$

c)  $\vec{u} + \vec{w}$

d)  $2\vec{u} - 3\vec{w}$

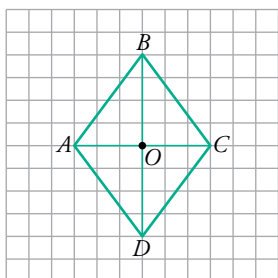
e)  $\vec{u} + 3\vec{w} - 4\vec{v}$

f)  $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



3 Observa el rombo de la figura y calcula:

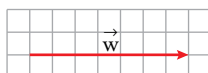
- a)  $\vec{AB} + \vec{BC}$
- b)  $\vec{OB} + \vec{OC}$
- c)  $\vec{OA} + \vec{OD}$
- d)  $\vec{AB} + \vec{CD}$
- e)  $\vec{AB} + \vec{AD}$
- f)  $\vec{DB} - \vec{CA}$



Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

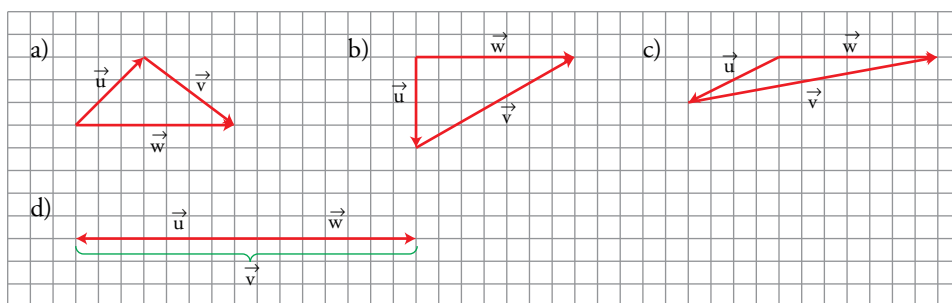
- a)  $\vec{AC}$
- b)  $\vec{AB} = \vec{DC}$
- c)  $\vec{BA} - \vec{CD}$
- d)  $\vec{AA} = 0$
- e)  $\vec{AC}$
- f)  $2\vec{DC}$

4 Considera el vector  $\vec{w}$ :

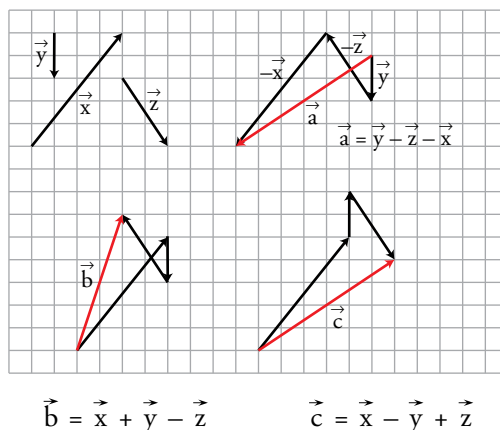


Dibuja en cada uno de estos casos un vector  $\vec{v}$  que sumado con  $\vec{u}$  dé como resultado  $\vec{w}$ :

- a)
- b)
- c)
- d)



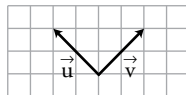
5 Los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  los hemos obtenido operando con los vectores  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ . ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?



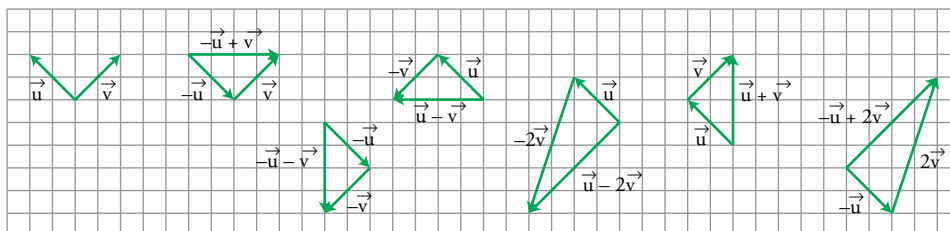
**Bases y coordenadas**

**6** A la vista de la figura, dibuja los vectores:

$$\begin{matrix} -\vec{u} + \vec{v} & \vec{u} - \vec{v} & \vec{u} + \vec{v} \\ -\vec{u} - \vec{v} & -\vec{u} + 2\vec{v} & \vec{u} - 2\vec{v} \end{matrix}$$

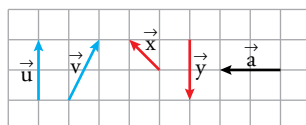


Si tomamos como base  $B(\vec{u}, \vec{v})$ , ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?

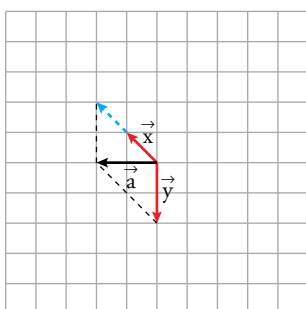


$$\begin{matrix} -\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1) & \vec{u} - \vec{v} = (1, -1) & \vec{u} + \vec{v} = (1, 1) \\ -\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1) & -\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2) & \vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2) \end{matrix}$$

**7** Escribe el vector  $\vec{a}$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ . Escríbelo también como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

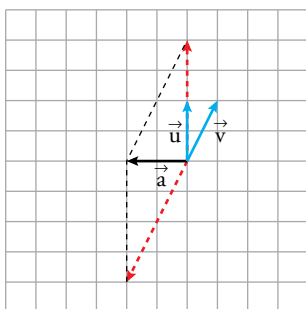


¿Cuáles son las coordenadas de  $\vec{a}$  respecto de la base  $B(\vec{x}, \vec{y})$ ? ¿Y respecto de la base  $B'(\vec{u}, \vec{v})$ ?



$$\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$$

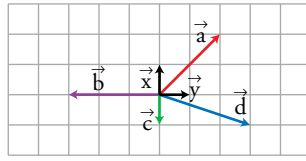
En la base  $B(\vec{x}, \vec{y})$ , las coordenadas de  $\vec{a}$  son  $\vec{a} = (2, 1)$ .



$$\vec{a} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$$

En la base  $B'(\vec{u}, \vec{v})$ , las coordenadas de  $\vec{a}$  son  $\vec{a} = (2, -2)$ .

8 Escribe las coordenadas de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  respecto a la base  $B(\vec{x}, \vec{y})$ .



$$\vec{a} = (2, 2); \vec{b} = (0, -3); \vec{c} = (-1, 0); \vec{d} = (-1, 3)$$

9 ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a)  $\vec{u}(3, -1)$ ,  $\vec{v}(1, 3)$       b)  $\vec{u}(2, 6)$ ,  $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ( $\vec{u} \neq k\vec{v}$  para cualquier  $k$ ). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ( $\vec{u} = 3\vec{v}$ ).

10 Considera el vector  $\vec{u}(-1, -3)$ . Da un vector  $\vec{v}$  tal que  $B(\vec{u}, \vec{v})$  sea una base, y un vector  $\vec{w}$  tal que  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  no formen una base.

Para que formen una base sus coordenadas no pueden ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es  $\vec{v} = (1, 4)$ .

Para que no formen una base, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es  $\vec{w} = (2, 6)$ .

**Página 183**

11 Dados los vectores  $\vec{u}(3, -5)$  y  $\vec{v}(-2, 1)$ , calcula:

a)  $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$       b)  $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a)  $-2(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b)  $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

12 Halla el vector  $\vec{b}$  tal que  $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ , siendo  $\vec{a}(-1, 3)$  y  $\vec{c}(7, -2)$ .

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$$\vec{b}(-20, 22)$$

13 Dados los vectores  $\vec{a}(3, -2)$ ,  $\vec{b}(-1, 2)$  y  $\vec{c}(0, -5)$ , calcula  $m$  y  $n$  de modo que:  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación,  $n = 3m$ , y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

**14** Expresa el vector  $\vec{a}(-1, -8)$  como combinación lineal de  $\vec{b}(3, -2)$  y  $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ .

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{r} -1 = 3m + 4n \\ -64 = -16m - 4n \\ \hline -65 = -13m \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando  $n$ :

$$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$$

Así, podemos decir:  $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

**15** En una base ortonormal las coordenadas de un vector son  $\vec{v}(2, -5)$ . Halla las coordenadas de  $\vec{v}$  en la base  $B = ((1, -1), (0, -1))$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x}(1, -1) \\ \vec{y}(0, -1) \\ \vec{v}(2, -5) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2, -5) = a(1, -1) + b(0, -1) = (a, -a) + (0, -b) = (a, -a - b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Las coordenadas de  $\vec{v}$  en la nueva base son (2, 3).

### ■ Producto escalar. Módulo y ángulo

**16** Dados los vectores  $\vec{x}(5, -2)$ ,  $\vec{y}(0, 3)$ ,  $\vec{z}(-1, 4)$ , calcula:

a)  $\vec{x} \cdot \vec{y}$

b)  $\vec{x} \cdot \vec{z}$

c)  $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a)  $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b)  $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c)  $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

**17** De los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sabemos que:

$$\vec{u}(-1, 1); |\vec{v}| = 1; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45^\circ; \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  y  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \text{ porque } \cos 90^\circ = 0.$$

**18** En una circunferencia de centro  $O$  y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices  $A, B, C, D, E, F$ . Calcula los productos:

- a)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$                       b)  $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$                       c)  $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$                       d)  $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

a)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos(\widehat{AOB}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b)  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c)  $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0^\circ \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

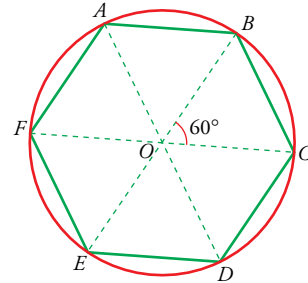
(\*)  $OAB$  es un triángulo equilátero, luego:

$$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$$

Razonamos igual para  $|\vec{ED}|$ .

d)  $\vec{BC} = -\vec{EF}$  (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego:  $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$



**19** Dados  $\vec{u}(2, 3)$ ,  $\vec{v}(-3, 1)$  y  $\vec{w}(5, 2)$ , calcula:

a)  $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c)  $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d)  $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a)  $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b)  $\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d)  $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

**20** Si  $A, B$  y  $C$  son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b)  $2\vec{AB} \cdot (-3\vec{AC})$

c)  $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB}$

d)  $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot \vec{AC}$

En un triángulo equilátero, los lados miden 1 y forman un ángulo de  $60^\circ$ .

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b)  $2\vec{AB} \cdot (-3\vec{AC}) = 2 \cdot (-3) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{6}{2} = -3$

c)  $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 1^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d)  $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot \vec{AC} = 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - 3\vec{AC} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3|\vec{AC}|^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

**21** Comprueba si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:

a)  $\vec{u}(0, 1), \vec{v}(2, 4)$

b)  $\vec{u}(0, 7), \vec{v}(-5, 0)$

c)  $\vec{u}(2, 5), \vec{v}(5, 2)$

d)  $\vec{u}(3, 6), \vec{v}(-2, 1)$

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 1) \cdot (2, 4) = 4 \neq 0 \rightarrow$  No son perpendiculares.

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 7) \cdot (-5, 0) = 0 \rightarrow$  Sí son perpendiculares.

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 5) \cdot (5, 2) = 20 \neq 0 \rightarrow$  No son perpendiculares.

d)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 6) \cdot (-2, 1) = 0 \rightarrow$  Sí son perpendiculares.

**22** Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.

a)  $\vec{u}(0, 3)$

b)  $\vec{u}(-5, 0)$

c)  $\vec{u}(3, 8)$

d)  $\vec{u}(-1, -1)$

PARALELO    PERPENDICULAR

a) (0, 9)                      (3, 0)

b) (10, 0)                    (0, -5)

c) (30, 80)                  (-8, 3)

d) (2, 2)                      (1, -1)

**23** Calcula  $k$  para que el producto  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  sea igual a 0 en los siguientes casos:

a)  $\vec{u}(6, k), \vec{v}(-1, 3)$

b)  $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right), \vec{v}(k, 3)$

c)  $\vec{u}(-3, -2), \vec{v}(5, k)$

d)  $\vec{u}(k, -k), \vec{v}(5, 5)$

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$  Cualquier  $k \in \mathbb{R}$  es válido.

**24** Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$

$\vec{v}(-2, 3)$

$\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25+0} = 5$

**25** Halla el valor de  $m$  para que el módulo del vector  $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$  sea igual a 1.

$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5}, m = \frac{4}{5}$

**26** Dada la base  $B = (\vec{u}, \vec{v})$  donde  $\vec{u}(3, -4)$  y  $\vec{v}(0, -8)$ , determina, en cada caso, una base  $B'$  de vectores unitarios tales que:

- a) Los vectores de  $B'$  sean paralelos a los de  $B$ .  
 b) Los vectores de  $B'$  sean perpendiculares a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

a)  $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5; \quad |\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$$

$$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \quad \vec{v}' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$$

b)  $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$$\vec{u}' \perp \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = (4, 3)$$

$$\vec{v}' \perp \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = (8, 0)$$

**27** Dado el vector  $\vec{u}(-5, k)$  calcula  $k$  de modo que:

a)  $\vec{u}$  sea ortogonal a  $\vec{v}(4, -2)$ .

b) El módulo de  $\vec{u}$  sea igual a  $\sqrt{34}$ .

a)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

**28** Dado el vector  $\vec{u}(5, 12)$ , determina:

a) Los vectores unitarios paralelos a  $\vec{u}$ .

b) Los vectores ortogonales a  $\vec{u}$  que tengan el mismo módulo que  $\vec{u}$ .

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$$

a)  $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$$

b)  $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$$\vec{v}_2 = (12, -5)$$

c)  $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$$

**29** Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector  $\vec{a}(8, 6)$ .

$\vec{u}' = (6, -8)$  es perpendicular a  $\vec{a}$ .

$$|\vec{u}'| = \sqrt{36+64} = 10$$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

El vector que buscamos es:

$$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$$

También es solución  $\vec{v}' = (-30, 40)$ .



**30** Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:

a)  $\vec{u}(3, 2)$ ,  $\vec{v}(1, -5)$       b)  $\vec{m}(4, 6)$ ,  $\vec{n}(3, -2)$       c)  $\vec{a}(1, 6)$ ,  $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a)  $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4} \sqrt{1+25}} = -\frac{7}{26} \sqrt{2} \approx -0,38 \rightarrow (\widehat{u, v}) = 112^\circ 20' 12''$

b)  $\cos(\widehat{m, n}) = \frac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36} \sqrt{9+4}} = 0 \rightarrow (\widehat{m, n}) = 90^\circ$

c)  $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36} \sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \rightarrow (\widehat{a, b}) = 180^\circ$

**31** Dados  $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$  y  $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , calcula  $k$  para que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  formen un ángulo de  $60^\circ$ .

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} \sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + k^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + k^2} = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}\sqrt{3}; k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

**32** Calcula  $x$ , de modo que el producto escalar de  $\vec{a}(3, -5)$  y  $\vec{b}(x, 2)$  sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \frac{17}{3}$$

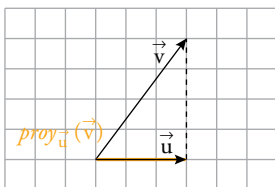
$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{7}{\sqrt{9+25} \sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2 \cdot 210} \approx 0,2 \rightarrow (\widehat{a, b}) = 79^\circ 31' 17''$$

**33** Calcula la proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ , la de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  y representa gráficamente cada situación.

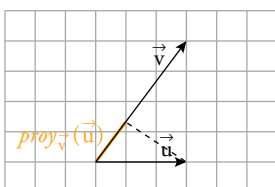
a)  $\vec{u}(3, 0)$  y  $\vec{v}(3, 4)$       b)  $\vec{u}(1, 3)$  y  $\vec{v}(-4, 2)$       c)  $\vec{u}(-2, -5)$  y  $\vec{v}(5, -2)$

a)  $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3$ ;  $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$ ;  $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{u, v}) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

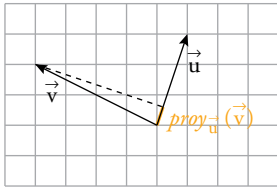


$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{u, v}) = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

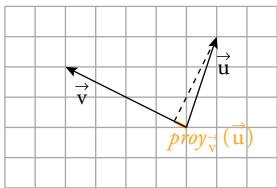


$$b) |\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}; |\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



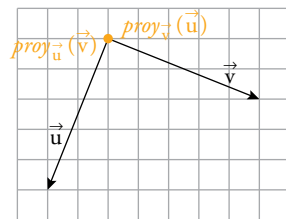
$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{10}\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$



$$c) |\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}; |\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$



Página 184

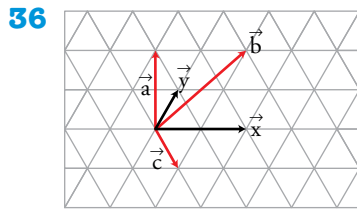
## Para resolver

**34** Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , entonces  $B = (\vec{u}, \vec{v})$  es una base.
- Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.
- Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.
- $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BA}$  tienen el mismo módulo, pero distinta dirección.
- El módulo de  $-3\vec{v}$  es el triple que el módulo de  $\vec{v}$ .
  - Verdadera, porque los vectores son perpendiculares, luego no tienen la misma dirección.
  - Falsa. Si son paralelos, sus coordenadas son proporcionales porque  $\vec{u} = k\vec{v}$ .
  - Verdadera. Si las coordenadas fueran proporcionales, serían paralelos.
  - Falsa. Tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.
- Verdadera:  $|-3\vec{v}| = |-3| |\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

**35** ¿Cómo es el ángulo formado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  en los siguientes casos?:

- a)  $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$       b)  $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$       c)  $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$   
 a)  $0^\circ < \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} < 90^\circ$       b)  $90^\circ < \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} < 180^\circ$       c)  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 90^\circ$



Expresa los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  como combinación lineal de  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ .

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$$

**37** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los vértices de un triángulo. Si  $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$ ,  $\overrightarrow{AC}(3, -1)$  y  $\overrightarrow{BC}(4, -5)$ , ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1, 4); \quad \overrightarrow{AC} = (3, -1); \quad \overrightarrow{BC} = (4, -5) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (3, -1) \cdot (4, -5) = 17 \end{aligned}$$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular. Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

**38** Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  los vértices de un cuadrilátero. Señala, en cada caso, las condiciones que deben cumplir los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  y  $\overrightarrow{DA}$  para que el cuadrilátero  $ABCD$  sea un:

- a) Cuadrado.      b) Paralelogramo.      c) Trapecio isósceles.      d) Trapecio escaleno.

a) Lados iguales y perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

b) Lados iguales dos a dos:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$$

c) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con el mismo módulo:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{BC} \not\parallel \overrightarrow{DA}; \quad |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$$

d) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con distinto módulo:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{BC} \not\parallel \overrightarrow{DA}; \quad |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{DA}|$$

**39** Sean  $\vec{a}(-6, 8)$  y  $\vec{b}(3, 4)$ . Halla, en cada caso, un vector  $\vec{c}(x, y)$  perpendicular a  $\vec{b}$  tal que:

- a)  $|\vec{c}| = |\vec{a}|$       b)  $|\vec{c}| = 1$       c)  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

a)  $|\vec{a}| = \sqrt{36+64} = 10$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$

Un vector  $\vec{c} \perp \vec{b}$  es de la forma  $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$ .

$$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \frac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$$

b)  $\vec{c} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c)  $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \rightarrow k = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$$\vec{c} = \frac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

**40** Dados los vectores  $\vec{u}(-1, a)$  y  $\vec{v}(b, 15)$ , halla  $a$  y  $b$ , en cada caso, de modo que:

a)  $\vec{u} \perp \vec{v}$  y  $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$  y  $|\vec{v}| = 17$

a)  $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1+a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones:  $a_1 = -3, b_1 = -45; a_2 = 3, b_2 = 45$

b)  $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones:  $a_1 = -\frac{1}{15}, b = -8; a_2 = 1, b_2 = 8$

**41** Dados los vectores  $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$  y  $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$ , siendo  $\vec{u} = (2, 3)$  y  $\vec{v} = (-3, 0)$ , halla  $k$  de modo que  $(\vec{a} + \vec{b})$  sea ortogonal a  $(\vec{a} - \vec{b})$ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} &= -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

**42** Calcula la proyección de  $\vec{u} + \vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  sabiendo que  $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$  y  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45^\circ$ .

Por ser  $|\vec{u}| = |\vec{v}| \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{1}{2} \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22^\circ 30'$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) &= |\vec{u} + \vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2} \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \\ &= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} \cos 22^\circ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4} \cos 22^\circ 30' = \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0,92 \approx 3,4 \end{aligned}$$

**43** De los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sabemos que  $|\vec{a}| = 3$  y  $|\vec{b}| = 5$  y que forman un ángulo de  $120^\circ$ . Calcula  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

Como:  $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0^\circ = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = \\ &= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49 \end{aligned}$$

Luego:  $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

- 44** Halla el valor que debe tener  $k$  para que los vectores  $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$  sean perpendiculares, siendo  $\vec{a}(3/2, 4)$  y  $\vec{b}(5, 0)$ .

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 = \frac{73}{4}$$

$$|\vec{b}|^2 = 25$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k^2\vec{a} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = k^2 \frac{73}{4} - 25$$

Este producto escalar tiene que ser cero, luego:

$$k^2 \frac{73}{4} - 25 = 0 \rightarrow k = \frac{10}{\sqrt{73}}; k = -\frac{10}{\sqrt{73}}$$

- 45** Si  $|\vec{u}| = 3$  y  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$ , halla  $|\vec{v}|$ .

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como  $|\vec{u}| = 3$ , se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

- 46** Sabiendo que  $|\vec{u}| = 3$ ,  $|\vec{v}| = 5$  y  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , halla  $|\vec{u} + \vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

$$(*) \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

- 47** Sea  $B(\vec{x}, \vec{y})$  una base ortonormal. Calcula  $|\vec{x} + \vec{y}|$  y  $|\vec{x} - \vec{y}|$ .

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 + 0 + |\vec{y}|^2 = 2 \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 - 0 + |\vec{y}|^2 = 2 \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{2}$$

- 48** Si  $|\vec{u}| = 4$ ,  $|\vec{v}| = 3$  y  $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$ , ¿qué ángulo forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

Razonando como en el problema guiado número 2, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 3^2$$

$$25 = 16 + 24 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 9$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^\circ$$

**49** Calcula  $x$  para que los vectores  $\vec{a}(7, 1)$  y  $\vec{b}(1, x)$  formen un ángulo de  $45^\circ$ .

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ \rightarrow 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \rightarrow \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow \frac{49+x^2+14x}{25} = 1+x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 49+x^2+14x = 25+25x^2 \rightarrow 24x^2-14x-24 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 12x^2-7x-12 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases} \end{aligned}$$

**50** Halla un vector unitario que forme un ángulo de  $30^\circ$  con el vector  $\vec{a}(1, \sqrt{3})$ .

Llamamos  $\vec{u} = (x, y)$  al vector buscado:

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{a}}) = 30^\circ \\ \|\vec{u}\| = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{x+y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = x+y\sqrt{3} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son:  $x = 0, y = 1$ ;  $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Por tanto:  $\vec{u}_1 = (0, 1)$ ;  $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

**51** Determina  $x$  para que los vectores  $\vec{u}(x, 1)$  y  $\vec{v}(x, 0)$  formen un ángulo de  $30^\circ$ .

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \rightarrow 4x^2 = 3(x^2+1) \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

**52** Halla un vector  $\vec{a}$  que forme un ángulo de  $60^\circ$  con el vector  $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$  y tenga como módulo la mitad del módulo de  $\vec{b}$ .

$\vec{a} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ \\ \|\vec{a}\| = \frac{1}{2} \|\vec{b}\| \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \cos 60^\circ = \frac{2x+2\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4+12}} \\ \|\vec{a}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4+12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2x+2\sqrt{3}y}{4\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = x+\sqrt{3}y \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = \sqrt{3}; x = 2, y = 0 \end{aligned}$$

Soluciones:  $\vec{a}_1 = (-1, \sqrt{3})$ ;  $\vec{a}_2 = (2, 0)$

**53** De una base  $B = (\vec{u}, \vec{v})$  se sabe que  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 1$  y  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ . En esa base las coordenadas de dos vectores son  $\vec{x}(1, 2)$  e  $\vec{y}(-1, 1)$ . Calcula  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ .

\* Mira el problema resuelto número 1.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7 \end{aligned}$$

**54** Dados  $\vec{a}(1, 2)$  y  $\vec{b}(5, 5)$ , expresa el vector  $\vec{b}$  como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que  $\vec{a}$  y otro ortogonal a  $\vec{a}$ .

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$ , donde:

- $\vec{x}$  tiene la misma dirección de  $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$$

$$\begin{cases} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{cases} \begin{matrix} k = 3 \\ h = -1 \end{matrix}$$

Los vectores pedidos son  $\vec{x}(3, 6)$  e  $\vec{y}(2, -1)$ .

**55** Se sabe que  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$  y  $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  son perpendiculares y que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ?

Si  $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \rightarrow 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Como  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son unitarios  $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120^\circ$$

**56** Demuestra que el vector  $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$  es perpendicular al vector  $\vec{c}$ .

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

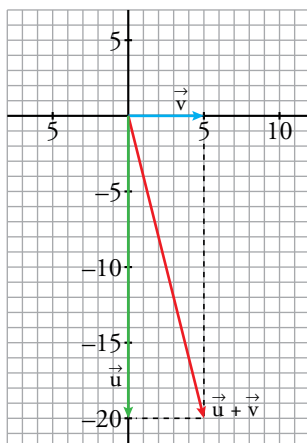
- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$\begin{aligned} (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2)(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)(b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2)a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \end{aligned}$$

- Calculamos ahora:

$$\begin{aligned} [(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}] \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0 \end{aligned}$$

**57** Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?



La velocidad es  $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$

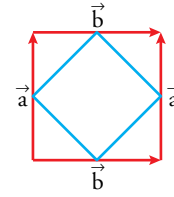
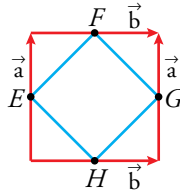
La dirección es  $(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}})$ . Calculemos este ángulo:

$$\cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0,97 \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) \approx 14^\circ 4' 11''$$

Se mueve en dirección sureste con  $14^\circ 4' 11''$  respecto de la dirección sur.

**58** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.

\* Mira el problema resuelto número 5.



$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \end{array} \right\} \rightarrow |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{EF}|$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \\ &= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0 \text{ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, } |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{aligned}$$

Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono  $EFGH$  miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono  $EFGH$  es un cuadrado.

**Página 185**

**Cuestiones teóricas**

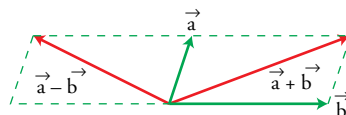
**59** Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

- a)  $2\vec{a} \cdot \vec{b}$                       b)  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$                       c)  $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$                       d)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$
- a) Número.                      b) Vector.                      c) Número.                      d) Número.

**60** Si  $B(\vec{a}, \vec{b})$  es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:

- a)  $(3\vec{a}, -2\vec{b})$                       b)  $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$                       c)  $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$                       d)  $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

- a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que  $3\vec{a}$  tiene la dirección de  $\vec{a}$  y  $-2\vec{b}$  tiene la dirección de  $\vec{b}$  (que, por ser  $B(\vec{a}, \vec{b})$  base, no es la misma).
- b) No, pues  $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$ , luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).
- c) Sí, pues tienen distinta dirección.



- d) No, pues tienen la misma dirección al ser  $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$ .



**61** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$       b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$       c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$       d)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,5 |\vec{a}||\vec{b}|$
- a)  $\cos(\widehat{a, b}) = 1 \rightarrow (\widehat{a, b}) = 0^\circ$       b)  $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow (\widehat{a, b}) = 90^\circ$
- c)  $\cos(\widehat{a, b}) = -1 \rightarrow (\widehat{a, b}) = 180^\circ$       d)  $\cos(\widehat{a, b}) = 0,5 \rightarrow (\widehat{a, b}) = 60^\circ$

**62** Busca algunos ejemplos con los que se vea que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ no implica que } \vec{b} = \vec{c}$$

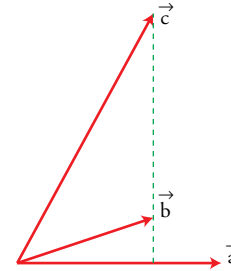
Considera los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  del dibujo de la derecha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{c})$$

Como ambas proyecciones coinciden:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo:  $\vec{b} \neq \vec{c}$



**63** Prueba, que si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $\vec{a} \perp \vec{c}$ , entonces:

$$\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c}), \quad m, n \in \mathbb{R}$$

Hay que probar que  $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$ . Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

**64** Prueba que si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ , entonces se verifica que  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

**65** Justifica por qué  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

$$|\cos(\widehat{a, b})| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1 \text{ porque el coseno de un ángulo, en valor absoluto, siempre es menor o igual que 1.}$$

Luego, pasando el denominador (que siempre es positivo) al segundo miembro:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

## Para profundizar

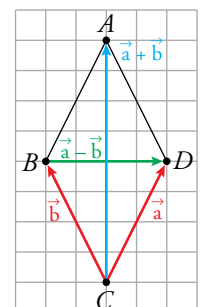
**66** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos).

a) Expresa las diagonales del rombo en función de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.

a)  $\vec{CA} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

b)  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$  porque los lados de un rombo tienen la misma longitud.



**67** Halla los ángulos interiores del triángulo  $ABC$ .

Observa que puedes expresar estos ángulos como ángulos entre vectores. Las coordenadas de estos vectores las obtendrás expresándolos como combinación lineal de la base  $B = (x, y)$ .

$$\overrightarrow{DH} = (8, 6); \overrightarrow{EG} = (-3, 4)$$

$$\hat{A} = (\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}})$$

$$\cos \hat{A} = \cos (\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}) = \frac{(8, 6) \cdot (-3, 4)}{|(8, 6)| |(-3, 4)|} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

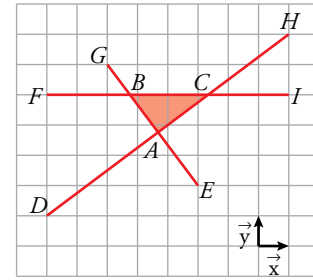
$$\overrightarrow{HD} = (-8, -6); \overrightarrow{IF} = (-8, 0)$$

$$\hat{C} = (\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}})$$

$$\cos \hat{C} = \cos (\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}) = \frac{(-8, -6) \cdot (-8, 0)}{|(-8, -6)| |(-8, 0)|} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\hat{C} = 35^\circ 52' 11''$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 35^\circ 52' 11'' = 54^\circ 7' 49''$$



**68** Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , definimos el vector proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  como el vector  $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ . Calcula analítica y gráficamente este vector si:

- a)  $\vec{u}(3, 4)$  y  $\vec{v}(3, -4)$       b)  $\vec{u}(8, 6)$  y  $\vec{v}(2, -1)$

¿Existe alguna relación entre el sentido de este vector y el ángulo  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ?

a)  $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Luego,  $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b)  $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{5} \frac{(8, 6) \cdot (2, -1)}{10\sqrt{5}} = 1$

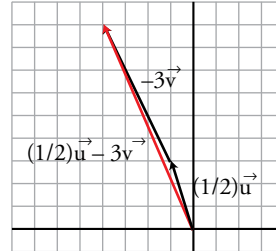
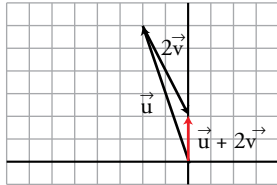
Luego,  $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Si el ángulo es agudo,  $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$  tiene el mismo sentido que  $\vec{u}$ , si el triángulo es obtuso, tiene sentido contrario a  $\vec{u}$ .

## Autoevaluación

1 Se consideran los vectores  $\vec{u}(-2, 6)$  y  $\vec{v}(1, -2)$ .

Calcula gráficamente y utilizando coordenadas,  $\vec{u} + 2\vec{v}$  y  $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$ .



$$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$$

$$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$$

2 Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores unitarios que forman un ángulo de  $60^\circ$ . Calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$                                       b)  $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$                                       c)  $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b)  $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c)  $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 Expresa el vector  $\vec{a}(-1, -9)$  como combinación lineal de los vectores de la base  $B = ((-2, 3), (-1, 5))$ .

$$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$$

$$\begin{cases} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \end{cases} \rightarrow -9 = -7k + 5 \rightarrow k = 2 \rightarrow s = 1 - 4 = -3$$

Por tanto:  $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5) \rightarrow \vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 Consideramos los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal son  $\vec{u}(0, 2)$  y  $\vec{v}(1, \sqrt{3})$ . Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2, |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c)  $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$

5 Considera el vector  $\vec{u}(3, -4)$ . Calcula:

a) Un vector paralelo a  $\vec{u}$  de módulo 1.

a)  $|\vec{u}| = 5; \vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b)  $\vec{v} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

b) Un vector perpendicular a  $\vec{u}$  de módulo 2.

**6** Sea  $\vec{u}(-3, k)$ . Calcula  $k$  de forma que:

- a)  $\vec{u}$  sea ortogonal a  $\vec{v}(4, -6)$ .                      b) El módulo de  $\vec{u}$  sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$

**7** Determina las coordenadas de un vector  $\vec{a}(x, y)$  que forme con el vector  $\vec{v}(-1, 0)$  un ángulo de  $60^\circ$  y cuyo módulo sea 2.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector  $\vec{a}$ :  $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

**8** Obtén un vector  $\vec{u}(x, y)$  ortogonal a  $\vec{v}(8, 6)$  y cuyo módulo sea la mitad del de  $\vec{v}$ .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \rightarrow \frac{25}{16}y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{array}$$

$$y = 4 \rightarrow x = -3$$

$$y = -4 \rightarrow x = 3$$

Hay dos soluciones:  $\vec{u}(-3, 4)$ ;  $\vec{u}(3, -4)$

**9** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  dos vectores unitarios que forman un ángulo de  $120^\circ$ . Calcula  $|\vec{a} + \vec{b}|$  y  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 - 1 + 1 = 1 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \end{aligned}$$