3 CAMPO GRAVITATORIO: GENERALIZACIÓN

3.1. CONCEPTO FÍSICO DE CAMPO

1. Cita dos ejemplos, al menos, de campo creado por una magnitud activa escalar y otros dos ejemplos de campo creado por una magnitud activa vectorial.

Ejemplos de campos escalares:

- Supongamos un corte transversal de un terreno. Es de esperar que existan diferentes materiales que, normalmente, estarán organizados por capas o estratos. Como cada material tiene distinta densidad, podemos definir un campo de densidades para dicho corte transversal.
- En toda columna de fluido expuesto a la presión atmosférica (por ejemplo, en una presa), la presión aumenta a medida que aumenta la profundidad. Es posible, por tanto, asociar un campo de presiones, en función de la altura, para dicha columna de fluido.
- El relieve de un terreno hace que cada punto tenga una altura diferente, medida generalmente a partir del nivel de altura del mar. Este campo de alturas es lo que se representa en los mapas topográficos, dando lugar a las curvas de nivel.

  Las curvas de nivel son las líneas isoescalares del correspondiente campo de alturas; es decir, las líneas formadas por los puntos situados a la misma altura.

Ejemplos de campos vectoriales:

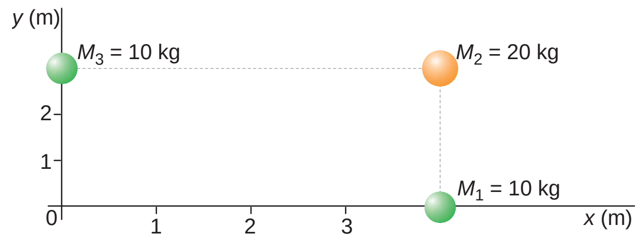
- Supongamos un mecanismo móvil, tipo biela-manivela. Podemos definir un campo de aceleraciones para cada uno de los puntos que forman parte de los diferentes sólidos rígidos del mecanismo.
- Imagina una viga empotrada en uno de sus extremos, con una carga puntual situada en su extremo libre. Dicha carga hace que el momento que soporta cada sección de viga vaya creciendo conforme nos alejamos del punto de aplicación de la carga y avanzamos hacia el extremo empotrado. Es decir, existe una distribución de momentos (esto es, un campo de momentos) a lo largo de la viga.
- Toda carga eléctrica crea en sus proximidades un campo de fuerzas que tiende a atraer o a repeler las cargas que se sitúan cerca de ella. Este campo de fuerzas recibe el nombre de campo eléctrico.

2. En cada uno de los ejemplos anteriores, señala cuál es la magnitud activa. En los campos vectoriales, señala si son o no son campos de fuerzas.

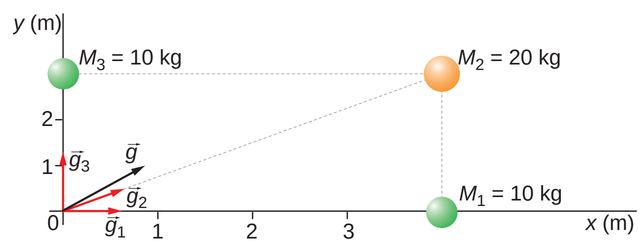
En los ejemplos de campos escalares, las magnitudes activas son la densidad, la presión y la altura, respectivamente. En el caso de los vectoriales son, respectivamente, la aceleración, los momentos y la fuerza eléctrica, que genera un campo de fuerzas.

3.2. CAMPO GRAVITATORIO

1. Dibuja el vector intensidad del campo gravitatorio que crea en el origen un sistema de masas como el de la figura, teniendo en cuenta la dirección y el sentido que le corresponde.



El vector intensidad de campo gravitatorio que corresponde a la distribución de masas indicada es el que se muestra en la ilustración:



2. En la actividad anterior, calcula el vector intensidad de campo gravitatorio. Considera $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.

Para calcular analíticamente el vector intensidad del campo gravitatorio, aplicaremos el teorema de superposición.

En la figura correspondiente a la actividad anterior hemos indicado los vectores unitarios en la dirección y el sentido del campo creado por cada una de las masas en el origen de coordenadas. Por tanto:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{g}_i = G \cdot \frac{M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + G \cdot \frac{M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 + G \cdot \frac{M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3$$

siendo:

$$\vec{u}_1 = \vec{i} \quad ; \quad \vec{u}_2 = \frac{4}{5} \cdot \vec{i} + \frac{3}{5} \cdot \vec{j} = 0{,}8 \cdot \vec{i} + 0{,}6 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_3 = \vec{j}$$

Por tanto:

$$\vec{g} = G \cdot \left(\frac{M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 + \frac{M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3 \right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left[\frac{10}{4^2} \cdot \vec{i} + \frac{20}{5^2} (0{,}8 \cdot \vec{i} + 0{,}6 \cdot \vec{j}) + \frac{10}{3^2} \cdot \vec{j} \right] =$$

$$= 10^{-10} \cdot (0{,}84 \cdot \vec{i} + 1{,}06 \cdot \vec{j}) \ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

3.3. INTENSIDAD DE CAMPO Y POTENCIAL

1. Considera el sistema físico propuesto en la primera actividad del epígrafe anterior. Calcula el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas y en el punto medio del rectángulo que forma dicho punto y los tres puntos en que se sitúan las masas.

Dado el carácter escalar del potencial gravitatorio, el que corresponde a un punto será la suma algebraica de los potenciales que crean cada una de las tres masas en dicho punto. Por tanto, en el origen:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=3} - G \cdot \frac{M_i}{r_i} = -G \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \frac{M_i}{r_i} = - G \cdot \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3} \right)$$

$$V_0 = - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{4} + \frac{20}{5} + \frac{10}{3} \right) = 6,56 \cdot 10^{-10} \ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

Y en el punto medio del rectángulo que indica el enunciado, teniendo en cuenta que la distancia de cada masa a ese punto es 2,5 m, obtenemos:

$$V = - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{2,5} \cdot (M_1 + M_2 + M_3) =$$

$$= - \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{2,5} \cdot (10 + 20 + 10) = 1,07 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

2. Dejamos libre, en el origen del sistema de coordenadas, una masa de 1 mg. Suponiendo que no existen rozamientos y que el plano *XY* es perfectamente horizontal, indica hacia dónde se moverá dicha masa (si se mueve). Justifica tu respuesta.

La masa se moverá en la dirección y el sentido del vector intensidad de campo gravitatorio (calculado en la segunda actividad del epígrafe anterior).

En particular, la masa estará sometida a una fuerza:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \rightarrow \vec{F} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-10} \cdot (0,84 \cdot \vec{i} + 1,06 \cdot \vec{j}) =$$

$$= 1 \cdot 10^{-16} \cdot (0,84 \cdot \vec{i} + 1,06 \cdot \vec{j}) \ \mathrm{N}$$

3.4. ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. ¿Existe algún punto en el que el potencial entre la Tierra y la Luna sea nulo? ¿Y la intensidad del campo gravitatorio?

Como se aprecia en la gráfica de la página 72 del libro del alumno, el potencial entre la Tierra y la Luna es siempre negativo; no se anula nunca.

En lo que respecta al campo gravitatorio, en primer lugar calculamos el campo gravitatorio creado por cada cuerpo en un punto cualquiera de la recta que une ambos cuerpos. Tomaremos como eje *OX* positivo la línea Tierra-Luna en el sentido Tierra-Luna. El origen del eje será el centro de la Tierra.

De este modo, y teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y que la distancia que las separa es $3{,}84 \cdot 10^8$ m:

$$\vec{g}_T = -G \cdot \frac{81 \cdot M_L}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL} \quad ; \quad \vec{g}_L = G \cdot \frac{M_L}{(L - X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

Si aplicamos el principio de superposición y sustituimos:

$$\vec{g}_T + \vec{g}_L = -G \cdot M_L \cdot \left(\frac{81}{X^2} - \frac{1}{(3{,}84 \cdot 10^8 - X)^2} \right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Al igualar a cero esta expresión, obtenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita es la distancia X medida respecto al centro de la Tierra, distancia a la cual el campo gravitatorio se anula:

$$80 \cdot X^2 - 6{,}22 \cdot 10^{10} \cdot X + 1{,}194 \cdot 10^{19} = 0 \rightarrow X = 3{,}46 \cdot 10^8 \text{ m}$$

2. ¿Cada cuánto tiempo se produce una pleamar? ¿Y una bajamar?

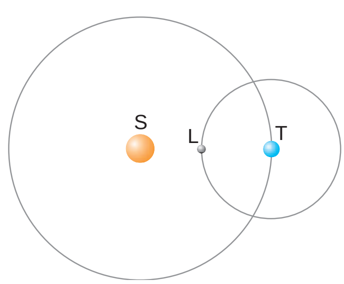
En cada giro de la Luna, que equivale a un día lunar, se producen dos pleamares y dos bajamares. Estos fenómenos se suceden cada poco más de seis horas, ya que el día lunar tiene una duración aproximada de 24 horas y 51 minutos.

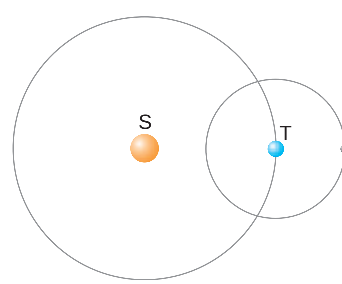
3. Dibuja las posiciones del Sol y de la Luna respecto a un punto de la Tierra en los siguientes supuestos:

a) Cuando se produce una marea viva.

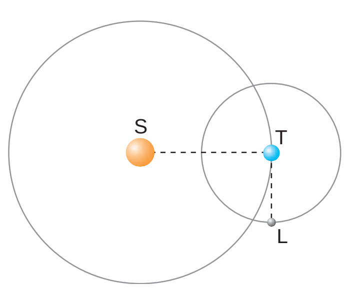
b) Cuando se produce una marea muerta.

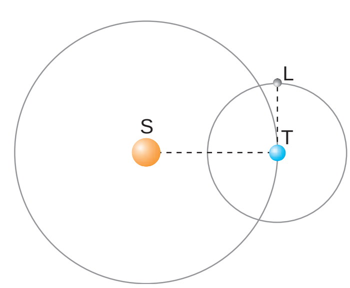
a) Las siguientes figuras muestran las posiciones relativas del Sol, la Tierra y la Luna cuando se produce una marea viva en situación de Luna nueva (izquierda) y de Luna llena (derecha):





b) La marea muerta se produce cuando el Sol y la Luna atraen a la Tierra formando un ángulo recto entre sí, como se muestra en las siguientes figuras:

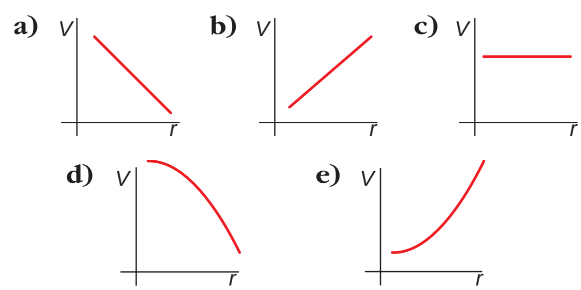




ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. ¿Cuál de las figuras que siguen muestra cómo varía el potencial gravitatorio que crea una masa, *M*, en función de la distancia?

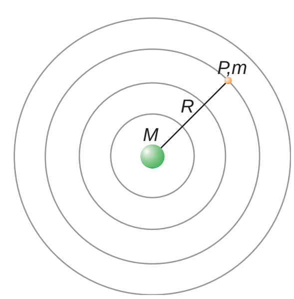


La expresión del módulo del potencial gravitatorio creado por una masa puntual es:

$$V(r) = G \cdot \frac{M}{r}$$

lo que indica que el potencial gravitatorio es inversamente proporcional a la distancia. Gráficamente, esto se representa con una hipérbola, según se muestra en la figura **e).**

2. Un objeto puntual *P*, de masa *m*, se encuentra en el interior del campo gravitatorio que crea otra masa, *M*. Dicho objeto se mueve con m.c.u., de radio *R*, alrededor de la masa *M*:



a) Calcula la energía que consume al dar una vuelta.

b) Si el objeto estuviera inicialmente en reposo, ¿cómo se movería? Indícalo sobre la figura.

a) El campo gravitatorio es un campo conservativo. En este tipo de campos, el trabajo que realiza la carga o la masa que se desplaza de un punto a otro no depende de la trayectoria, sino de las posiciones inicial y final. Como la partícula da una vuelta, las posiciones inicial y final coinciden, y, por tanto, $W_{ciclo} = 0$.

Teniendo en cuenta, además, que $W = -\Delta E_p$, la variación de energía será nula. La masa puntual no consume energía al dar una vuelta completa.

b) Toda masa abandonada en el seno de un campo gravitatorio tiende a moverse en el sentido de potenciales decrecientes. Es decir, la masa m situada en el punto P se moverá perpendicularmente a las líneas equipotenciales, acercándose a la masa M.

3. Comenta la siguiente frase: "Dado un campo de fuerzas, siempre es posible encontrar una energía potencial asociada a él".

Dado un campo de fuerzas, solo podemos asociarle una energía potencial si el campo es conservativo. Por tanto, la afirmación que hace el enunciado de la cuestión es falsa.

4. Calcula el campo y el potencial gravitatorios que crean dos masas puntuales iguales, separadas 1 m entre sí, en el punto medio de la recta que las une. Expresa el resultado en función de G y m.

Dos masas puntuales iguales crearán, en el punto medio de la recta que las une, campos del mismo valor y de sentido contrario; por tanto, se anulan:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$$

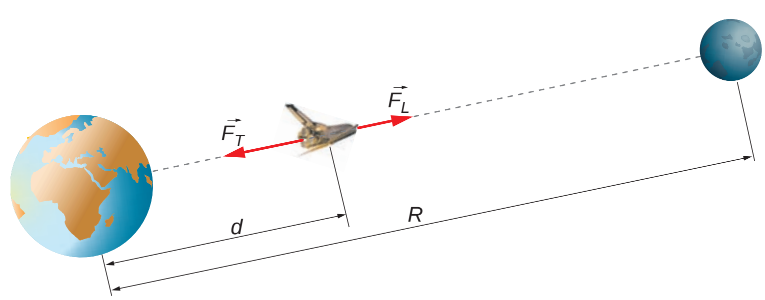
El potencial es una magnitud escalar; por tanto, para obtenerlo sumamos algebraicamente el que crea cada masa:

$$V_1 = G \cdot \frac{m}{d} = G \cdot \frac{m}{0{,}5} = V_2$$

$$V = V_1 + V_2 = 2 \cdot \frac{G \cdot m}{0{,}5} = 4 \cdot G \cdot m$$

5. Describe cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa m en su viaje de la Tierra a la Luna. Supón que la Tierra y la Luna están en reposo y que la nave se mueve siguiendo la dirección que une sus centros.

En la trayectoria que sigue la nave espacial desde la Tierra hasta la Luna, está sometida a las fuerzas gravitatorias de ambas, como se indica en la siguiente ilustración:



La fuerza total que actúa sobre la nave (su peso), si tomamos como origen del sistema de referencia el centro de la Tierra, es:

$$\vec{P} = \vec{F}_G = \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d^2} + G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(R-d)^2}\right) \cdot \vec{i} \text{ N}$$

donde el vector $\vec{i}$ apunta hacia el centro de la Luna.

Cuando la nave se encuentra sobre la superficie terrestre, podemos considerar despreciable la atracción lunar sobre ella; por tanto, su peso será:

$$\vec{P}_{Tierra} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \cdot \vec{i} = -9,81 \cdot m \cdot \vec{i} \text{ N}$$

A medida que la nave se aleja de la Tierra y se acerca a la Luna, la fuerza gravitatoria terrestre disminuye y aumenta la fuerza gravitatoria lunar sobre ella. En concreto, cuando se encuentra en la superficie de la Luna, su peso será:

$$\vec{P}_{Luna} = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{R_L^2} \cdot \vec{i} = g_L \cdot m \cdot \vec{i}$$

En este caso, el peso está dirigido hacia la Luna, donde hemos considerado despreciable la atracción terrestre.

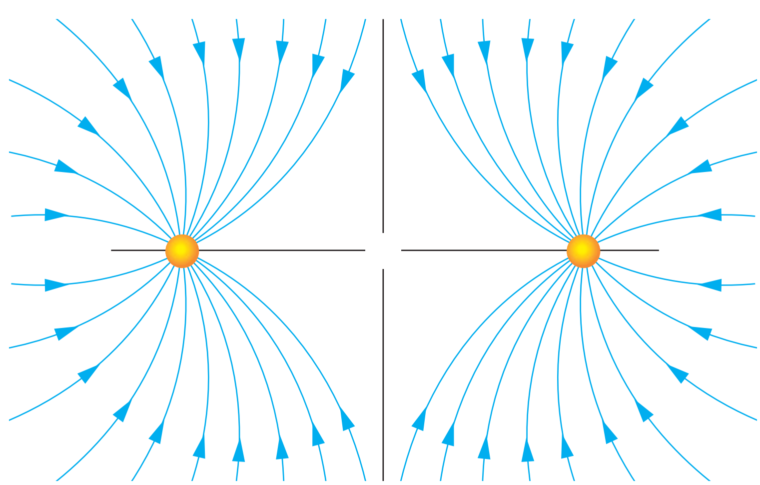
Por tanto, inicialmente, el peso de la nave en la Tierra vale 9,81 · m, dirigido hacia la Tierra; después va disminuyendo, hasta que en algún punto se anula (allí donde el campo gravitatorio creado por la Tierra y la Luna es nulo), y luego aumenta de nuevo, hasta que en la superficie lunar su valor es $g_L \cdot m$, dirigido hacia el centro de la Luna.

6. Dibuja las líneas del campo gravitatorio producido por dos masas puntuales iguales separadas una cierta distancia.

a) ¿Existe algún punto donde la intensidad del campo gravitatorio sea nula? En caso afirmativo, indica dónde.

b) ¿Existe algún punto donde el potencial gravitatorio sea nulo? En caso afirmativo, indica dónde.

En la siguiente figura se representan las líneas de fuerza que solicita el enunciado:



a) El campo gravitatorio que crea cada una de las masas es:

$$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 \quad ; \quad \vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2$$

El campo gravitatorio resultante será nulo en el punto en que: $\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$; es decir, $\vec{g}_1 = -\vec{g}_2$. Por tanto:

$$-G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2$$

La igualdad anterior se cumplirá solo en el caso de que los vectores unitarios tengan la misma dirección y sentidos opuestos. En ese caso, resulta:

$$G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2}$$

Como las masas son iguales, ha de cumplirse que:

$$r_1^2 = r_2^2 \rightarrow r_1 = r_2$$

El punto que cumple la condición es el punto medio de la recta que las une. Por tanto, sí existe un punto en el que la intensidad de campo gravitatorio se anula.

b) El potencial gravitatorio creado por cada una de las masas es:

$$V_1 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} \quad ; \quad V_2 = -\frac{G \cdot m_2}{r_2}$$

El potencial total es la suma algebraica de los anteriores. Por tanto, teniendo en cuenta que ambas masas son iguales, obtenemos:

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} + \left(-\frac{G \cdot m_2}{r_2}\right) = -G \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

De acuerdo con la expresión obtenida, el potencial gravitatorio creado por ambas masas siempre es negativo, y no nulo.

EJERCICIOS

7. En la superficie de la Luna, el período de un péndulo simple de 1 m de longitud es $T = 4{,}7$ s. Si el radio de la Luna es $R_L = 1\,738$ km:

a) Determina la gravedad en la superficie lunar.

b) Determina la velocidad de escape en la superficie de la Luna.

a) La expresión que permite calcular el período de un péndulo simple es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_L}}$$

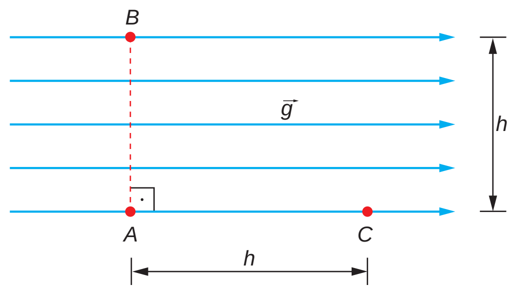
Por tanto:

$$g_L = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1}{4{,}7^2} = 1{,}79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) El valor de la velocidad de escape es:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}79 \cdot 1\,738 \cdot 10^3} = 2\,492{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8. En cierta región del espacio existe exclusivamente un campo gravitatorio uniforme, como se indica en la figura:



Se traslada una masa desde el punto *A* hasta el punto *B* y otra igual del punto *A* al punto *C*. Los trabajos realizados por el campo gravitatorio son, respectivamente:

a) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

b) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = -m \cdot g \cdot h$

c) $W_{AB} = m \cdot g \cdot h$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

d) $W_{AB} = m \cdot g \cdot h$; $W_{AC} = m \cdot g \cdot h$

El trabajo del campo para conducir la masa de *A* a *B* es:

$$W_{A \rightarrow B} = F \cdot d = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 90° = 0$$

dado que la fuerza (que tiene la misma dirección que el campo gravitatorio) y el desplazamiento son perpendiculares.

Por otra parte, para conducir la masa de *A* a *C:*

$$W_{A \rightarrow C} = F \cdot d = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 0° = m \cdot g \cdot h$$

Observa que el signo del trabajo es positivo, ya que el vector desplazamiento y el vector campo gravitatorio tienen la misma dirección y sentido (el trabajo es realizado por las fuerzas del campo).

La respuesta correcta es la **a).**

9. En la superficie de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio es, aproximadamente, seis veces la existente en la superficie de la Luna. Sabemos que, en la Tierra, un hilo se rompe si se le cuelga un objeto de 5 kg. ¿Qué masa, expresada en kilogramos, rompería ese mismo hilo en la Luna? Razona la respuesta.

La tensión máxima que soporta el hilo se corresponde con el peso máximo que dicho hilo puede soportar, que, si la masa que cuelga es *m,* resulta ser:

$$T = m \cdot g$$

En la Luna, la masa, *m',* que podrá soportar será la correspondiente al peso que ejerza la misma tensión que en la Tierra:

$$T = m' \cdot g_L$$

siendo g_L la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.

Al igualar los segundos miembros de las expresiones anteriores, resulta:

$$T = m' \cdot g_L = m \cdot g \rightarrow m' = \frac{g}{g_L} \cdot m$$

Si tenemos en cuenta que:

$$g = 6 \cdot g_L \rightarrow g_L = \frac{g}{6}$$

obtenemos el valor de la mayor masa que puede soportar:

$$m' = \frac{g}{g/6} \cdot m = 6 \cdot m$$

$$m' = 6 \cdot 5 = 30 \text{ kg}$$

10. Calcula la gravedad, *g*, en función de la que existe en la superficie de la Tierra, para un punto situado a una altura, *h*, mucho menor que el radio de esta, *R*.

La aceleración de la gravedad, que es el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra, viene dada por la expresión:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Para un punto próximo a la superficie de la Tierra, podemos escribir:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2 \cdot \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Si desarrollamos el binomio de la expresión anterior, resulta:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{h}{R_T} + \left(\frac{h}{R_T}\right)^2$$

En esta expresión podemos despreciar el término de segundo orden, ya que, según se nos dice en el enunciado, $h << R_T$.

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior, podemos establecer la igualdad:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{2 \cdot h}{R_T}}$$

que es el resultado pedido.

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

11. La energía potencial que corresponde a una molécula viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}}$$

En esta expresión, *a* y *b* son dos constantes de valor positivo, y *x*, la distancia entre átomos. ¿Para qué valores de *x* se anula *U*(*x*)? ¿Para qué valores de *x* pasa *U*(*x*) por un mínimo?

La función se anulará en los puntos que cumplan $U(x) = 0$.

$$U(x) = 0 \rightarrow \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0 \rightarrow a = b \cdot x^6 \rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$$

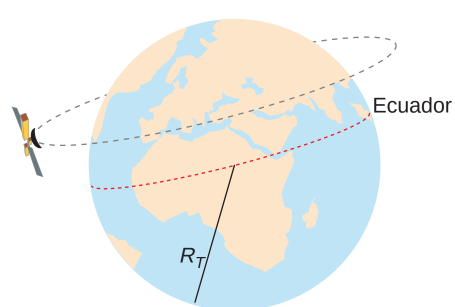
Los extremos relativos (máximos y mínimos locales) de una función se dan para aquellos valores en los que la primera derivada se anula. Por tanto:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = 0 = -\frac{12 \cdot a}{x^{13}} - \frac{6 \cdot b}{x^7}$$

Resolviendo la ecuación, resulta:

$$12 \cdot a = 6 \cdot b \cdot x^6 \rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{2 \cdot a}{b}}$$

12. Razona por qué es imposible que un satélite artificial describa en torno a la Tierra una órbita que, como la de la figura, no está contenida en el plano del ecuador, sino en otro paralelo a él.



La fuerza centrípeta que mantiene un satélite en órbita circular en torno a la Tierra es la fuerza gravitatoria que esta ejerce sobre él:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza central, dirigida hacia el centro de la Tierra.

Si un satélite describiera una órbita en un plano paralelo al que contiene el ecuador, la dirección de la fuerza gravitatoria (central) no coincidiría con la dirección de la fuerza centrípeta (que es perpendicular a la dirección del vector velocidad y cuyo sentido está dirigido hacia el centro de curvatura), lo que va en contra de las leyes que rigen el movimiento de los satélites artificiales en torno a la Tierra.

13. Un planeta tiene un radio que es tres veces mayor que el de otro. Si la densidad de ambos es la misma, ¿en cuál de los dos es mayor el peso de un mismo cuerpo? ¿Cómo afecta esto a la masa de un cuerpo?

Sabemos que las densidades de los dos planetas son iguales, aunque sus masas y radios son diferentes. Esto nos lleva a:

$$d_1 = d_2 \rightarrow 1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\left(\frac{M_1}{V_1}\right)}{\left(\frac{M_2}{V_2}\right)} = \frac{\frac{M_1}{4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3}}{\frac{M_2}{4/3 \cdot \pi \cdot R_2^3}} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

A partir de la igualdad anterior, es posible calcular la relación entre sus masas:

$$1 = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{(3 \cdot R_2)^3}{R_2^3} = \frac{3^3}{1} = 27$$

Para comprobar en qué planeta es mayor el peso, veamos la relación entre el campo gravitatorio en la superficie de cada uno:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G \cdot \frac{M_1}{R_1^2}}{G \cdot \frac{M_2}{R_2^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3$$

Es decir, en el planeta 1 el peso de un cuerpo es tres veces superior que en el planeta 2.

Este hecho no guarda influencia alguna sobre la masa del cuerpo. Recordemos que la masa de un cuerpo es la cantidad de materia de este. Es una magnitud intrínseca y universal; no depende del lugar donde nos encontremos.

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

PROBLEMAS

14 Un saltador de longitud consigue una marca de 9,20 metros. ¿Cuál sería la marca de ese mismo saltador en la superficie de la Luna, suponiendo que la longitud del salto es inversamente proporcional a la gravedad?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ kg

$M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ kg

Se trata de hallar la relación entre los campos gravitatorios en las superficies de la Tierra y de la Luna.

Con los datos que nos proporciona el enunciado podemos relacionar ambos campos gravitatorios, de forma que:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{G \cdot \frac{M_{Tierra}}{R^2{}_{Tierra}}}{G \cdot \frac{M_{Luna}}{R^2{}_{Luna}}}$$

Si sustituimos cada término por su valor, podremos despejar directamente la relación entre ambos campos:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{\dfrac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,38 \cdot 10^{6})^2}}{\dfrac{7,34 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^{6})^2}} = 6,06$$

El enunciado nos indica que la distancia del salto es inversamente proporcional al campo gravitatorio de cada planeta. Por tanto:

$$\frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} = \frac{d_{Luna}}{d_{Tierra}}$$

$$d_{Luna} = \frac{g_{Tierra}}{g_{Luna}} \cdot d_{Tierra} = 6,06 \cdot 9,20 = 55,75 \text{ m}$$

15. Calcula el campo que crea la Tierra, supuesta puntual, sobre un asteroide situado a 100 000 km de ella.

Dato: $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ U.I.

El campo gravitatorio creado por la Tierra en un punto alejado de ella cierta distancia viene dado por:

$$\vec{g} = -\,G \cdot \frac{M_T}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

donde R es la distancia del centro de la Tierra al asteroide. De este modo, resulta:

$$\vec{g} = -\,6,673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(100 \cdot 10^{6})^2} \cdot \vec{u}_r = -\,4 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

16. En el problema anterior, calcula la energía potencial que posee dicho asteroide cuando lo situamos en ese punto, debido a la acción que ejerce sobre él el campo gravitatorio terrestre.

Dato: La masa del asteroide es 10^9 kg.

Antes de calcular la energía potencial, hemos de calcular el potencial gravitatorio:

$$V = -\,G \cdot \frac{M_T}{R} = -\,6,673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{100 \cdot 10^{6}} = -\,4 \cdot 10^{6} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La energía potencial tendrá un valor:

$$E_p = m_{asteroide} \cdot V = 10^9 \cdot (-\,4 \cdot 10^6) = -\,4 \cdot 10^{15} \text{ J}$$

17. Una niña, de 32 kg de masa, está situada sobre la superficie terrestre:

a) ¿Cuál es su peso?

b) ¿Cuál sería su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar el radio?

c) ¿Cuál sería su peso si el radio de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar la masa?

d) ¿Cuál sería su peso si la masa y el radio de la Tierra se redujesen a la mitad?

a) El peso de la niña será $P = m \cdot g$, donde g es el campo gravitatorio en la superficie de la Tierra. Expresado en función del radio y de la masa de la Tierra:

$$P = m \cdot g \rightarrow P = 32 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

b) Hablar de reducción del peso equivale a hablar de reducción de la intensidad del campo gravitatorio, pues ambas magnitudes son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \dfrac{M_T}{2 \cdot R_T^2}}{G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow g' = 0{,}5 \cdot g$$

El peso sería ahora la mitad:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 0{,}5 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 16 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

c) Procediendo del mismo modo que en el apartado anterior:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \dfrac{M_T}{(R_T / 2)^2}}{G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2}} = 4 \rightarrow g' = 4 \cdot g$$

El peso sería ahora:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 4 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 128 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

es decir, cuatro veces mayor.

d) Por último, en este caso:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G \cdot \dfrac{M_T / 2}{(R_T / 2)^2}}{G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2}} = 2 \rightarrow g' = 2 \cdot g$$

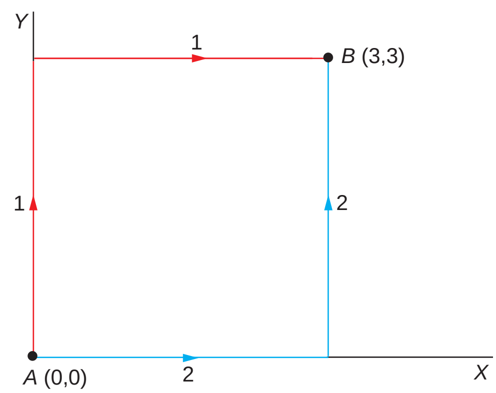
el peso se duplicaría:

$$P = m \cdot g' = 32 \cdot 2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 64 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

18 **Una partícula se mueve del punto *A* al punto *B*, impulsada por una fuerza:**

$$\vec{F} = 2 \cdot x \cdot \vec{i} - 5 \cdot y \cdot \vec{j}$$



a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 1.

b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 2.

a) El trabajo necesario para desplazar la partícula se obtiene resolviendo la integral:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy)$$

para cada uno de los caminos especificados.

Para la trayectoria número 1:

$$W_1 = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy) = \int_0^0 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^3 5 \cdot y \cdot dy + \int_0^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_3^3 5 \cdot y \cdot dy$$

$$W_1 = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - 5 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3 = 9 - 22{,}5 = -13{,}5 \text{ J}$$

b) Del mismo modo, para la trayectoria 2:

$$W_2 = \int (2 \cdot x \cdot dx - 5 \cdot y \cdot dy) = \int_0^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^0 5 \cdot y \cdot dy + \int_3^3 2 \cdot x \cdot dx - \int_0^3 5 \cdot y \cdot dy$$

$$W_2 = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - 5 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3 = 9 - 22{,}5 = -13{,}5 \text{ J}$$

Como vemos, el trabajo es el mismo y no depende de la trayectoria.

19. Dado el campo de fuerzas:

$$\vec{A} = \frac{6 \cdot x^2 - 4}{2 \cdot x} \cdot \vec{i}$$

en el que *A* se mide en newton cuando *r* se expresa en metros, calcula la diferencia de potencial que existe entre dos puntos situados, respectivamente, a unas distancias $x_1 = 1$ m y $x_2 = 2$ m del centro del campo.

El potencial asociado a un campo de fuerzas se calcula a partir de la expresión:

$$V = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para hallar la diferencia de potencial entre ambos puntos, aplicamos la expresión que corresponde:

$$\Delta V = -\int_1^2 \frac{6 \cdot x^2 - 4}{2 \cdot x} \cdot dx = -\int_1^2 \left(3 \cdot x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx$$

$$\Delta V = -\frac{3 \cdot x^2}{2}\Bigg|_1^2 + 2 \cdot \ln x \,\Big|_1^2 = -(6 - 1,5) + 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1) = -3,11 \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

20 **Determina el campo gravitatorio (módulo, dirección y sentido) resultante de los campos gravitatorios individuales de la Tierra y del Sol, en un punto situado en la recta que une la Tierra y el Sol, a una distancia de $4 \cdot 10^5$ km de la Tierra.**

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²**

$M_{Tierra} = 5,98 \cdot 10^{24}$ **kg**

$M_{Sol} = 1,99 \cdot 10^{30}$ **kg**

$d_{Tierra\text{-}Sol} = 15 \cdot 10^7$ **km**

Si tomamos como origen del sistema de referencia el centro de la Tierra, los campos gravitatorios que crean la Tierra y el Sol, respectivamente, son:

$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^8)^2} = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_S = \frac{G \cdot M_S}{(r_{T-S} - r)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{[(1500 - 4) \cdot 10^8]^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El campo gravitatorio total será la suma de ambos; como lo que hemos calculado son sus módulos, el módulo del campo gravitatorio total será su resta, y estará dirigido hacia el mayor; es decir, hacia el Sol, sobre la recta que une este con la Tierra. Por tanto:

$$g_{total} = g_S - g_T = 5,93 \cdot 10^{-3} - 2,49 \cdot 10^{-3} = 3,44 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$